

**Banco de México**  
**Documentos de Investigación**

**Banco de México**  
**Working Papers**

**N° 2010-06**

**Regresión de Horizonte Largo Espuria en Econometría**

**Antonio E. Noriega**  
Banco de México  
Universidad de Guanajuato

**Daniel Ventosa-Santaulària**  
Universidad de Guanajuato

Junio 2010

La serie de Documentos de Investigación del Banco de México divulga resultados preliminares de trabajos de investigación económica realizados en el Banco de México con la finalidad de propiciar el intercambio y debate de ideas. El contenido de los Documentos de Investigación, así como las conclusiones que de ellos se derivan, son responsabilidad exclusiva de los autores y no reflejan necesariamente las del Banco de México.

The Working Papers series of Banco de México disseminates preliminary results of economic research conducted at Banco de México in order to promote the exchange and debate of ideas. The views and conclusions presented in the Working Papers are exclusively the responsibility of the authors and do not necessarily reflect those of Banco de México.

# Regresión de Horizonte Largo Espuria en Econometría\*

Antonio E. Noriega<sup>†</sup>

Banco de México  
Universidad de Guanajuato

Daniel Ventosa-Santaulària<sup>‡</sup>

Universidad de Guanajuato

## Resumen

Este artículo extiende investigación reciente sobre el comportamiento del estadístico  $t$  en una regresión de horizonte largo (RHL). Suponemos que la variable explicativa y la dependiente son generadas de acuerdo a los siguientes modelos: un proceso lineal estacionario en tendencias, uno de tendencia quebrada, uno de raíz unitaria, y uno con doble raíz unitaria. Mostramos tanto asintóticamente como en muestras finitas, que la presencia de RHL espuria depende del modelo asumido para las variables. Proponemos un procedimiento de inferencia asintóticamente correcto para probar la hipótesis nula de no relación en una RHL, el cual funciona ya sea que las variables tengan una relación de largo plazo o no. Nuestros resultados teóricos son aplicados a un conjunto internacional de datos sobre producto y dinero para probar neutralidad monetaria de largo plazo. Bajo nuestro nuevo enfoque, y usando métodos de remuestreo, encontramos que la neutralidad se mantiene para todos los países.

**Palabras Clave:** Regresión de horizonte largo, teoría asintótica, tendencias deterministas y estocásticas, raíces unitarias, cambios estructurales, neutralidad monetaria de largo plazo.

## Abstract

This paper extends recent research on the behaviour of the  $t$ -statistic in a long-horizon regression (LHR). We assume that the explanatory and dependent variables are generated according to the following models: a linear trend stationary process, a broken trend stationary process, a unit root process, and a process with a double unit root. We show that, both asymptotically and in finite samples, the presence of spurious LHR depends on the assumed model for the variables. We propose an asymptotically correct inferential procedure for testing the null hypothesis of no relationship in a LHR, which works whether the variables have a long-run relationship or not. Our theoretical results are applied to an international data set on money and output in order to test for long-run monetary neutrality. Under our new approach and using bootstrap methods, we find that neutrality holds for all countries.

**Keywords:** Long-horizon regression, asymptotic theory, deterministic and stochastic trends, unit roots, structural breaks, long-run monetary neutrality.

**JEL Classification:** C12, C22, E51.

---

\*Agradecemos a Carlos Capistrán, Daniel Chiquiar, Russell Davidson, y participantes a los seminarios del Banco de México, CIMAT, Instituto de Matemáticas de la UNAM, Universidad de Guanajuato, y a Mario Oliva por su excelente asistencia en la investigación. Las opiniones en este artículo corresponden a los autores y no reflejan necesariamente el punto de vista del Banco de México.

<sup>†</sup>Dirección General de Investigación Económica. Email: anoriega@banxico.org.mx.

<sup>‡</sup>Departamento de Economía y Finanzas, Universidad de Guanajuato. Email: daniel@ventosa-santaularia.com.

# 1 Introducción

Valkanov (2003) estudia el comportamiento asintótico del estadístico  $t$  en una regresión de horizonte largo y encuentra que, en un marco de una raíz cercana a la unidad en un proceso  $AR$ , este estadístico diverge, incluso cuando ambas variables son generadas independientemente. Un comportamiento divergente similar es reportado en Lee (2007) para el caso de procesos independientes fraccionalmente integrados.

Esto tiene implicaciones potencialmente importantes para la inferencia estadística en áreas de la economía en las cuales las regresiones de horizonte largo (RHL) han sido usadas; por ejemplo en las áreas de predictibilidad de rendimientos de acciones, el efecto Fisher, la neutralidad monetaria, y el tipo de cambio y los fundamentales.<sup>1</sup> Por ejemplo, un enfoque popular de series de tiempo para probar la neutralidad monetaria de largo plazo, propuesto por Fisher and Seater (1993), está basado en las propiedades de serie de tiempo del dinero y la producción, y en el estadístico  $t$  en un modelo de regresión de horizonte largo. En este contexto, la divergencia del estadístico  $t$  indicaría, con probabilidad que se aproxima a uno a medida que el tamaño de la muestra crece a infinito, una relación de largo plazo entre el dinero y la producción, i.e., el rechazo de la proposición de neutralidad monetaria de largo plazo.

Después de más de dos décadas de investigación en pruebas de raíz unitaria, aún no hay consenso sobre la fuente de persistencia en el comportamiento de largo plazo de muchas variables macroeconómicas. Hay una variedad de modelos empíricos en la literatura que dan lugar a diferentes tipos de comportamiento no estacionario de largo plazo siendo muy populares las tendencias lineales, las tendencias lineales con quiebres y las raíces unitarias.<sup>2</sup>

En este documento, estudiamos el comportamiento asintótico del estadístico  $t$  en una regresión de horizonte largo bajo diferentes combinaciones de tendencias lineales, tendencias lineales con quiebres y procesos de raíz unitaria entre la variable explicativa y la dependiente. Esto no ha sido explorado antes en la literatura de regresiones de horizonte largo, y tiene implicaciones inferenciales importantes en trabajo aplicado en economía.

Nuestros resultados muestran que el fenómeno de regresión asintótica de horizonte largo espuria depende del proceso generador de datos asumido para la variable explicativa y la dependiente. Por ejemplo, corroboramos el hallazgo de Valkanov cuando ambas variables siguen una raíz unitaria, pero también encontramos que cuando la variable explicativa sigue

---

<sup>1</sup>Ver Valkanov (2003) para una discusión interesante de las primeras tres áreas en el contexto de RHL, y Chen y Chou (2010) para la evidencia empírica en la relación entre tipos de cambio y fundamentales.

<sup>2</sup>También hay una literatura para probar una raíz unitaria contra un modelo alternativo no lineal, como los modelos de Disparo Autoregresivos, los modelos Autoregresivos de Transición Suave, y los modelos de Conmutación de Markov (ver por ejemplo Caner y Hansen (2001), Kapetanios, et. al. (2003), y Nelson, et. al (2001)). El análisis de estos casos está fuera del alcance de este documento.

una raíz unitaria mientras la dependiente sigue una tendencia lineal, entonces el estadístico  $t$  no diverge. Por otro lado, cuando ambas variables siguen un modelo de tendencia quebrada, el estadístico diverge, rechazando espuriamente la nula de no relación (entre las variables independientes). Llegamos a esa conclusión mediante el cálculo del orden en probabilidad para el estadístico  $t$  en una regresión de horizonte largo. En general, encontramos que el problema de regresión de horizonte largo espuria se presentará cuando la variable dependiente, la variable explicativa, o ambas, sean perturbadas por un choque permanente, lo cual pudiera ser de naturaleza determinística o estocástica. Para mitigar este problema, presentamos un procedimiento que asintóticamente garantiza inferencia correcta independientemente de que las variables tengan una relación de largo plazo o no: dado un nivel de significancia, cuando las variables son independientes, la nula de no relación no será rechazada, mientras que cuando las variables estén cointegradas, la nula será rechazada, indicando correctamente una relación de largo plazo.

También presentamos nueva evidencia sobre neutralidad monetaria para el conjunto de datos internacionales analizados en Noriega (2004) y Noriega *et. al.* (2008), los cuales incluyen datos de dinero y producción para Australia, Argentina, Brasil, Canadá, Italia, México, Suecia, y el Reino Unido. Basados en nuestros resultados asintóticos, hacemos una prueba para la neutralidad de largo plazo al reescalar un estadístico  $t$  remuestreado en una regresión de horizonte largo para cada país, usando datos de producción y dinero generados por modelos identificados por Noriega *et. al.* (2008). Nuestros resultados indican que, en todos los casos, la neutralidad monetaria no puede ser rechazada.

En la sección 2 discutimos el tema de los mecanismos de tendencia para las variables. La sección 3 presenta los resultados asintóticos, los cuales derivamos tanto bajo la nula de no relación de largo plazo entre las variables como bajo la alternativa de cointegración. La contraparte de muestra finita de nuestra teoría de límites es analizada en la sección 4 vía simulaciones. La sección 5 presenta la aplicación empírica de hacer pruebas para neutralidad monetaria. La sección final concluye.

## 2 Mecanismos de tendencia para los datos

Desde principios de los años ochenta, una gran cantidad de esfuerzo ha sido dedicado a descubrir la naturaleza de la tendencia de series de tiempo económicas.<sup>3</sup> Sin embargo, la discordia aún no ha sido resuelta, y mientras que hay autores que favorecen el uso de tenden-

---

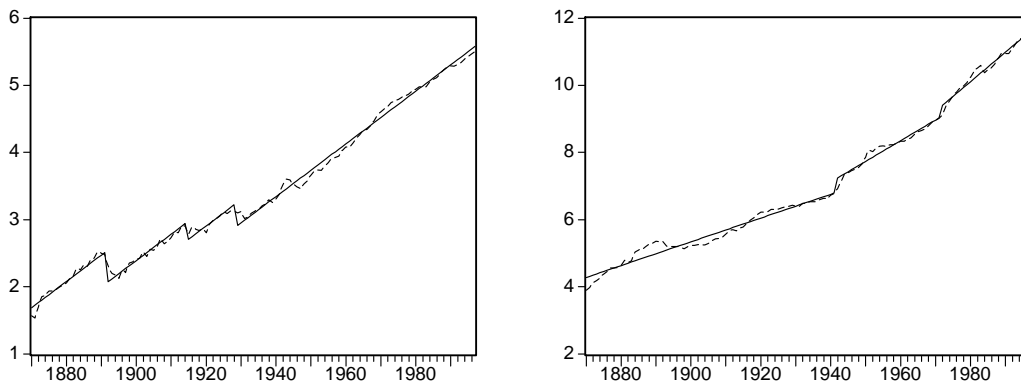
<sup>3</sup>Algunos ejemplos de esto pueden ser encontrados en Nelson y Plosser (1982), Perron (1989, 1992, 1997), Murray y Nelson (2000), Cook (2005), Assaf (2008), Maslyuk y Smyth (2008), Rahman y Saadi (2008), y Kim y Perron (2009).

cias estocásticas para los datos macro, hay otros en favor de las tendencias determinísticas. Inclusive algunos han argumentado que los datos pueden ser no informativos respecto a que si la tendencia de largo plazo es descrita mejor como determinística o estocástica.<sup>4</sup>

En general, la literatura empírica ha mostrado que el comportamiento de largo plazo de los datos macro puede ser bien caracterizado usando tendencias determinísticas lineales, tendencias determinísticas lineales con quiebres estructurales, o tendencias estocásticas. Como un ejemplo de este conjunto de modelos, Noriega *et. al.* (2008, NSV de ahora en adelante) encontraron que para Australia, Suecia y el Reino Unido, datos anuales de producción y dinero parecen estar bien caracterizados por un modelo Estacionario en Tendencia Quebrada (*ETQ*). Como ejemplo, el caso de Australia es reproducido en la Figura 1, donde los datos se muestran ( $y_t$  es la producción real y  $x_t$  es dinero) junto con su tendencia ajustada (quebrada) respectiva.

**Figura 1**

Tendencia de largo plazo para la producción y el dinero en Australia  
 $y_t \sim I(0) + 3$  quiebres  
 1891 (N), 1914 (N), 1928 (N)  
 $x_t \sim I(0) + 2$  quiebres  
 1941 (NT), 1971 (NT)



Nota: N (NT) significa Nivel (Nivel y Tendencia)

NSV también encuentran que para Canadá,  $y_t$  parece seguir un modelo de tendencia lineal, mientras que  $x_t$  sigue uno de tendencia quebrada. Para Argentina y México,  $y_t$  sigue un modelo de *ETQ*, mientras  $x_t$  sigue uno de raíz unitaria. Para Brasil  $y_t$  sigue un modelo de *ETQ*, mientras  $x_t$  sigue un proceso de doble raíz unitaria. Además, para los Estados Unidos y Dinamarca, las desviaciones de  $x_t$  y  $y_t$  de una tendencia lineal parecen rechazar una raíz

<sup>4</sup>Para un análisis sobre si la función de tendencia de largo plazo de la producción real de EEUU debería ser modelada como estacionaria en tendencia o estacionaria en diferencias ver, entre otros, Rudebusch (1993), Diebold y Senhadji (1996), Nelson y Murray (2000), Papell y Prodan (2004), Vougas (2007), y Darne (2009).

unitaria, haciendo  $y_t$  y  $x_t$  Estacionarios en Tendencia, o *ET*. Finalmente, para Italia, un modelo de raíz unitaria [o  $I(1)$ ] fue corroborado por los datos para  $x_t$  y  $y_t$ .

De los ejemplos de arriba, y en efecto de muchos otros ejemplos en la literatura empírica, parece razonable asumir que las tendencias lineales, las tendencias quebradas, y las tendencias estocásticas son capaces de representar adecuadamente el comportamiento de largo plazo de los datos macro. Por lo tanto estudiamos inferencia usando Regresiones de Horizonte Largo (RHL) bajo cuatros Procesos Generadores de Datos (PGD), descritos en el siguiente supuesto:

SUPUESTO. Los *PGD* para  $z = y, x$  son los siguientes

| Caso | Nombre     | Modelo   |
|------|------------|--|
| 1.   | <i>ET</i>  | $z_t = \mu_z + \beta_z t + u_{zt}$                                       |
| 2.   | <i>ETQ</i> | $z_t = \mu_z + \theta_z DU_{zt} + \beta_z t + \gamma_z DT_{zt} + u_{zt}$ |
| 3.   | $I(1)$     | $\Delta z_t = \mu_z + u_{zt}$  |
| 4.   | $I(2)$     | $\Delta^2 x_t = u_{xt}$  |

donde  $u_{yt}$  and  $u_{xt}$  son innovaciones independientes que obedecen las condiciones de nivel general del Supuesto 1 en Phillips (1986), y  $DU_{zt}$ ,  $DT_{zt}$  son variables dummy que permiten cambios en el nivel de tendencia y en la pendiente, respectivamente, o sea,  $DU_{zt} = \mathbf{1}(t > T_{b_z})$  y  $DT_{zt} = (t - T_{b_z})\mathbf{1}(t > T_{b_z})$ , donde  $\mathbf{1}(\cdot)$  es una función indicadora, y  $T_{b_z}$  es la fecha desconocida del quiebre en  $z$ . Nosotros representamos la fracción de quiebre como  $\lambda_z = (T_{b_z}/T) \in (0, 1)$ , donde  $T$  es el tamaño de la muestra. Los *PGD* incluyen mecanismos de tendencia determinísticos y estocásticos, con 12 posibles combinaciones no estacionarias entre la variable explicativa y la dependiente.<sup>5</sup> Note que el caso  $I(2)$  está restringido a la variable  $x_t$  solamente. Esto es así debido a nuestro particular interés en probar la neutralidad monetaria, lo cual exploramos en la Sección 5. Respecto a ello, la evidencia empírica sugiere que el caso  $I(2)$  podría ser relevante para las variables nominales en niveles, como el nivel de los agregados monetarios o el nivel de precios, pero no para los datos en términos reales, o las tasas de crecimiento de los datos nominales.<sup>6</sup>

El Lema 1 reúne resultados útiles sobre las innovaciones del Supuesto para el análisis subsecuente. La comprobación se presenta en el Apéndice 1.

LEMA 1. *Para  $z = y, x$ , permitamos que las variables aleatorias  $\{u_{zt}\}_1^\infty$  obedezcan el Supuesto 1 en Phillips (1986, p. 313). Definamos  $\sum_{j=1}^k u_{zt-j+1} = S_{zt}$ , y permitamos que el tamaño de muestra  $T$  y la longitud del horizonte  $k$  crezca de tal manera que  $\frac{k}{T} \rightarrow \kappa \in (0, 1)$  cuando ambos  $T \rightarrow \infty$  y  $k \rightarrow \infty$ . Entonces*

<sup>5</sup>Los casos de procesos  $I(1)$  con procesos fraccionalmente integrados son estudiados en Lee (2007).

<sup>6</sup>Ver por ejemplo Juselius (1996, 1999), Haldrup (1998), Muscatelli y Spinelli (2000), Coenen y Vega (2001), y Nielsen (2002).

- a)  $T^{-1/2} \sum_{t=k+1}^T (u_{zt} - u_{zt-k}) \equiv Su_z = O_p(1)$
- b)  $T^{-1} \sum_{t=k+1}^T (u_{zt} - u_{zt-k})^2 \equiv Su_z \varrho = O_p(1)$
- c)  $T^{-1/2} \sum_{t=k+1}^T (u_{xt} - u_{xt-k})(u_{yt} - u_{yt-k}) \equiv Su_{xy} = O_p(1)$
- d)  $T^{-3/2} \sum_{t=k+1}^T S_{zt} \equiv SSu_z = O_p(1)$
- e)  $T^{-2} \sum_{t=k+1}^T S_{zt}^2 \equiv SSu_z \varrho = O_p(1)$
- f)  $T^{-2} \sum_{t=k+1}^T S_{xt} S_{yt} \equiv SSu_x Su_y = O_p(1)$
- g)  $T^{-3/2} \sum_{t=k+1}^T (u_{zt} - u_{zt-k})(DT_t - DT_{t-k}) \equiv Su_z DT = O_p(1)$
- h)  $T^{-1} \sum_{t=k+1}^T S_{xt}(u_{yt} - u_{yt-k}) \equiv SS_{xy} = O_p(1)$
- i)  $T^{-5/2} \sum_{t=k+1}^T S_{xt}(DT_t - DT_{t-k}) \equiv SSu_x DT = O_p(1)$

El análisis asintótico de la siguiente sección hará uso de momentos muestrales de los modelos en el Supuesto. Los reunimos en el Lema 2 al factorizar las potencias descendientes del tamaño de muestra. De esta forma, los órdenes de probabilidad pueden ser determinados al retener solamente los términos asintóticamente relevantes, sobre una normalización adecuada. Omitimos la prueba debido a que estos momentos muestrales pueden ser obtenidos mediante (algunas veces tediosos) cálculos directos, usando los resultados del Lema 1.<sup>7</sup>

LEMA 2. *Si, para  $z = y, x$ , las variables aleatorias  $\{u_{zt}\}_1^\infty$  obedecen el Supuesto 1 en Phillips (1986, p. 313) y  $\frac{k}{T} \rightarrow \kappa \in (0, 1)$  cuando ambos  $T \rightarrow \infty$  y  $k \rightarrow \infty$ , entonces los momentos muestrales de  $z_t^* \equiv \sum_{j=1}^k \Delta^{(z)} z_{t-j+1}$ , pueden ser escritos como sigue:*

a) Para el caso de  $z$  siguiendo un proceso  $ET$ :

- i)  $\sum_{t=k+1}^T z_t^* = \kappa(1 - \kappa)\beta_z T^2 + Su_z T^{1/2}$
- ii)  $\sum_{t=k+1}^T z_t^{*2} = \kappa^2(1 - \kappa)\beta_z^2 T^3 + 2\beta_z \kappa Su_z T^{3/2} + Su_z \varrho T$
- iii)  $\sum_{t=k+1}^T x_t^* y_t^* = \kappa^2(1 - \kappa)\beta_x \beta_y T^3 + \kappa(\beta_x Su_y + \beta_y Su_x) T^{3/2} + Su_{xy} T^{1/2}$

b) Para el caso de  $z$  siguiendo un proceso  $ETQ$ :<sup>8</sup>

- i)  $\sum_{t=k+1}^T z_t^* = \left\{ \kappa(1 - \kappa)\beta_z + \left[ \kappa(1 - \kappa) - \frac{1}{2}\lambda_z^2 \right] \gamma_z \right\} T^2 + O(T)$
  - ii)  $\sum_{t=k+1}^T z_t^{*2} = \left\{ (1 - \kappa)\kappa^2\beta_z^2 + \kappa \left[ 2(1 - \kappa)\kappa - \lambda_z^2 \right] \beta_z \gamma_z + \left[ (1 - \kappa)\kappa^2 - \kappa\lambda_z^2 + \frac{1}{3}\lambda_z^3 \right] \gamma_z^2 \right\} T^3 + O(T^2)$
  - iii)  $\sum_{t=k+1}^T x_t^* y_t^* = \left[ \kappa^2(1 - \kappa)\beta_x \beta_y + \kappa\beta_x \gamma_y \left[ \kappa(1 - \kappa) - \frac{1}{2}\lambda_y^2 \right] + \kappa\beta_y \gamma_x \left[ \kappa(1 - \kappa) - \frac{1}{2}\lambda_x^2 \right] + \gamma_x \gamma_y f_{\lambda\kappa} \right] T^3 + O(T^2)$
- donde  $f_{\lambda\kappa} \equiv \frac{1}{3}(\kappa - \lambda_d)^3 + \frac{1}{2}\lambda_d(\kappa - \lambda_d)^2 + \kappa\lambda_d(\kappa - \lambda_d) - \frac{1}{3}(\kappa - \lambda_y)^3 - \frac{1}{2}\lambda_d(\kappa - \lambda_y)^2 + \frac{1}{2}\kappa\lambda_d^2 + (1 - \kappa - \lambda_y)\kappa^2$ , y  $\lambda_d = \lambda_y - \lambda_x$

<sup>7</sup>Los cálculos fueron auxiliados por el software Mathematica 6.

<sup>8</sup>Para los procesos  $ETQ$  calculamos los momentos muestrales asumiendo que  $\kappa > \lambda_z$  y  $\kappa + \lambda_z < 1$ ,  $z = y, m$ . Estos supuestos implican que el quiebre ocurre en la primera mitad de la muestra, y no afectan los resultados en términos del orden de magnitud. Esto también aplica a los casos d) y f) de abajo.

c) Para el caso de  $z$  siguiendo un proceso  $I(1)$ :

$$\begin{aligned} i) \sum_{t=k+1}^T z_t^* &= \kappa(1-\kappa)\mu_z T^2 + SSu_z T^{3/2} \\ ii) \sum_{t=k+1}^T z_t^{*2} &= \kappa^2(1-\kappa)\mu_z^2 T^3 + 2\kappa\mu_z SSu_z T^{5/2} + SSu_z^2 T^2 \\ iii) \sum_{t=k+1}^T x_t^* y_t^* &= \kappa^2(1-\kappa)\mu_x \mu_y T^3 + \kappa [\mu_x SSu_y + \mu_y SSu_x] T^{5/2} + SSu_x Su_y T^2 \end{aligned}$$

d) Para la combinación donde  $y$  sigue un proceso  $ETQ$ , mientras  $x$  sigue un proceso  $ET$  (para el caso contrario simplemente intercambie los subíndices  $y$  y  $x$ ):

$$\sum_{t=k+1}^T x_t^* y_t^* = \left\{ \beta_x \beta_y \kappa^2 (1-\kappa) + \beta_x \gamma \kappa \left[ \kappa(1-\kappa) - \frac{1}{2} \lambda^2 \right] \right\} T^3 + (\beta_x \kappa \theta \lambda + \frac{1}{2} \beta_x \kappa \lambda \gamma) T^2 + (\beta_x \kappa S u_y + \beta_y \kappa S u_x + \gamma S u_x D T) T^{3/2} + O_p(T)$$

e) Para la combinación donde  $y$  sigue un proceso  $ET$ , mientras  $x$  sigue un proceso  $I(1)$  (para el caso contrario simplemente intercambie los subíndices  $y$  y  $x$ ):

$$\sum_{t=k+1}^T x_t^* y_t^* = \kappa^2(1-\kappa)\mu_x \beta_y T^3 + \kappa \beta_y SSu_x \cdot T^{5/2} + \kappa \mu_x S u_y \cdot T^{3/2} + SS_{xy} T$$

f) Para la combinación donde  $y$  sigue un proceso  $ETQ$ , mientras  $x$  sigue un proceso  $I(1)$  (para el caso contrario simplemente intercambie los subíndices  $y$  y  $x$ ):

$$\sum_{t=k+1}^T x_t^* y_t^* = \left\{ \kappa^2(1-\kappa)\mu_x \beta + \mu_x \gamma \kappa \left[ \kappa(1-\kappa) - \frac{1}{2} \lambda^2 \right] \right\} T^3 + (\kappa \beta SSu_x + \gamma SSu_x D T) T^{5/2} + O_p(T^2).$$

Como era esperado, las tendencias determinísticas dominan asintóticamente. Estos momentos representan el principal insumo para el análisis asintótico de la siguiente sección.

### 3 Teoría asintótica para regresiones de horizonte largo

En esta sección consideraremos el comportamiento asintótico del estadístico  $t_{\hat{\delta}_k}$  para probar la hipótesis nula  $H_0 : \delta_k = 0$  en la siguiente regresión estimada de horizonte largo:

$$y_t^* = \hat{\alpha}_k + \hat{\delta}_k x_t^* + \hat{\varepsilon}_{kt} \quad (1)$$

donde  $z_t^* \equiv \sum_{j=1}^k \Delta^{\langle z \rangle} z_{t-j+1}$ , para  $z = y, x$ ;  $\varepsilon_k$  es una variable aleatoria con media cero, y  $\Delta$  representa el operador de diferencias ( $\Delta^j z_t \equiv (1 - L^j) z_t = z_t - z_{t-j}$ , donde  $L$  es un operador de rezagos). La notación  $\langle z \rangle$  se refiere al orden de integración de  $z$ , i.e.  $\langle z \rangle = 1$  significa que la  $z$  es integrada de orden uno,  $I(1)$ .

En la literatura de neutralidad monetaria por ejemplo, la ecuación (1) es el vehículo recomendado por Fisher y Seater (1993) para probar la neutralidad monetaria de largo plazo (para el caso de  $\langle z \rangle = 1$ ) y la superneutralidad (para el caso de  $\langle y \rangle = 1$ ,  $\langle x \rangle = 2$ ).

En el análisis asintótico de este documento, permitimos que tanto el tamaño de muestra  $T$  y la longitud del horizonte  $k$  crezcan, pero restringimos su cociente a converger a una constante finita, i.e.,  $\frac{k}{T} \rightarrow \kappa \in (0, 1)$  cuando ambos  $T \rightarrow \infty$  y  $k \rightarrow \infty$  [este es el enfoque



seguido por Richardson y Stock (1989), Valkanov (2003), y Lee (2007)]. La ecuación (1) puede ser escrita en forma matricial  $y = X\beta_k + \varepsilon$ , con  $y$  un vector  $T \times 1$  de datos  $y_t$ , con  $\sum_{j=1}^k \Delta^{(y)} y_{t-j+1}$  como su  $t^{th}$  elemento,  $X$  una matriz  $T \times 2$  que incluye un término constante y datos de  $x_t$  con  $\sum_{j=1}^k \Delta^{(x)} x_{t-j+1}$  como su  $t^{th}$  elemento, y  $\varepsilon$  un vector  $T \times 1$  de perturbaciones con media cero.

El vector de estimadores de MCO (Mínimos Cuadrados Ordinarios) se define como:

$$\widehat{\beta}_k = \begin{bmatrix} \widehat{\alpha}_k \\ \widehat{\delta}_k \end{bmatrix} = (X'X)^{-1}X'y,$$

donde

$$X'X = \begin{bmatrix} T(1-k) & \sum_{t=k+1}^T x_t^* \\ \sum_{t=k+1}^T x_t^* & \sum_{t=k+1}^T x_t^{*2} \end{bmatrix}, \text{ y } X'y = \begin{bmatrix} \sum_{t=k+1}^T y_t^* \\ \sum_{t=k+1}^T x_t^* y_t^* \end{bmatrix}.$$

El estadístico  $t$  es definido por

$$t_{\widehat{\delta}_k} = \widehat{\delta}_k [\widehat{\sigma}_\varepsilon^2 (X'X)_{22}^{-1}]^{-1/2},$$

donde  $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2$  es la varianza estimada de la regresión,

$$\widehat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\sum_{t=k+1}^T (y_t^* - \widehat{\alpha}_k - \widehat{\delta}_k x_t^*)^2}{T(1-k)}$$

y  $(X'X)_{22}^{-1}$  representa el 2do elemento de la diagonal de  $(X'X)^{-1}$ . Como ejemplo en cuanto al uso de este marco, la proposición de neutralidad de largo plazo (NLP) es verificada usando  $t_{\widehat{\delta}_k}$  mediante la prueba de la hipótesis nula  $H_0 : \delta_k = 0$  en (1). Bajo  $H_0$ , NLP se sostiene, mientras el rechazo de la nula implica que no se cumple la neutralidad monetaria.

Calculamos el orden de magnitud y la distribución asintótica de  $t_{\widehat{\delta}_k}$  con la ayuda de un código de *Mathematica 6.0*. Para cada combinación de PGD en el Supuesto para  $y$  y  $x$ , usamos los siguientes pasos, los cuales acompañamos con algunas líneas del código (el Apéndice 2 presenta un ejemplo de código completo).

1. Definimos la matriz (simétrica)  $2 \times 2$   $X'X$ , con elementos

$$\begin{aligned} a_{11} &= T(1-k), \\ a_{12} &= a_{21} = \sum_{t=k+1}^T x_t^*, \\ a_{22} &= \sum_{t=k+1}^T x_t^{*2}, \end{aligned}$$

y el vector  $2 \times 1$   $X'y$  con elementos

$$\begin{aligned} b_1 &= \sum_{t=k+1}^T y_t^*, \\ b_2 &= \sum_{t=k+1}^T x_t^* y_t^*. \end{aligned}$$

También definimos  $c_1 = \sum_{t=k+1}^T y_t^{*2}$  para el cálculo de la varianza del error.

En el caso de la estimación de la ecuación (1) usando como PGD el modelo  $I(1)$ :  $\Delta z_t = \mu_z + u_{zt}$ ,  $z = y, x$ , las matrices en el código de *Mathematica* incluirán los siguientes objetos: (ver parte *c*) en Lema 2):

$$\begin{aligned}
a11 &= (1 - \kappa) * T; \\
a12 &= a21 = \kappa * (1 - \kappa) * \mu_x * T^2 + SSu_x * T^{3/2}; \\
a22 &= \kappa^2 * (1 - \kappa) * \mu_x^2 * T^3 + 2 * \kappa * \mu_x * SSu_x * T^{5/2} + SSu_x2 * T^2; \\
b1 &= \kappa * (1 - \kappa) * \mu_y * T^2 + SSu_y * T^{3/2}; \\
b2 &= \kappa^2 * (1 - \kappa) * \mu_x * \mu_y * T^3 + \kappa * (\mu_x * SSu_y + \mu_y * SSu_x) * T^{5/2} + SSu_x Su_y * T^2; \\
c1 &= \kappa^2 * (1 - \kappa) * \mu_y^2 * T^3 + 2 * \kappa * \mu_y * SSu_y * T^{5/2} + SSu_y2 * T^2;
\end{aligned}$$

El comportamiento asintótico de  $SSu_z$  y  $SSu_z2$ , para  $z = x, y$ , y  $SSu_x Su_y$  es presentado en el LEMA 1.

2. Calculamos los estimadores MCO de  $\hat{\alpha}_k$  y  $\hat{\delta}_k$  a partir del producto de  $(X'X)^{-1}$  y  $X'y$ , y los denominamos ‘*alpha*’ y ‘*delta*’ en el código, como sigue:

$$\begin{aligned}
XX &= \begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix}; \\
invXX &= Inverse[XX]; \\
alpha &= Factor[invXX[[1, 1]] * b1 + invXX[[1, 2]] * b2]; \\
delta &= Factor[invXX[[2, 1]] * b1 + invXX[[2, 2]] * b2];
\end{aligned}$$

3. En seguida, definimos el numerador y denominador de *alpha* y *delta*, etiquetado ‘*alphanum*’, ‘*alphaden*’, ‘*deltanum*’, ‘*deltaden*’, y usamos *Mathematica* para encontrar el exponente máximo de  $T$  de los elementos de tanto el numerador como el denominador de *alpha* y *delta*, los cuales denominamos ‘*expalphanum*’, ‘*expalphaden*’, ‘*expdeltanum*’ y ‘*expdeltaden*’. Por ejemplo, para el caso de  $\hat{\delta}_k$  el código sería:

$$\begin{aligned}
deltanum &= Numerator[delta]; \\
deltaden &= Denominator[delta]; \\
expdeltanum &= Exponent[deltanum, T]; \\
expdeltaden &= Exponent[deltaden, T];
\end{aligned}$$

4. Luego usamos *Mathematica* para encontrar el límite del numerador y denominador de *alpha* y *delta* normalizados por  $T$  para las potencias maxima correspondientes ‘*expalphanum*’, ‘*expalphaden*’, ‘*expdeltanum*’ y ‘*expdeltaden*’. Denominamos a estos límites ‘*numalpha*’, ‘*denalpha*’, ‘*numdelta*’ y ‘*dendelta*’. De esta manera, solamente preservamos los términos asintóticamente no insignificantes del numerador y denominador de los estimadores MCO. De nuevo, para el caso de  $\hat{\delta}_k$  el código se vería como:

$$\begin{aligned}
numdelta &= Limit[Expand[deltanum / T^expdeltanum], T -> \infty]; \\
dendelta &= Limit[Expand[deltaden / T^expdeltaden], T -> \infty];
\end{aligned}$$

5. La distribución asintótica de los estimadores MCO es luego encontrada al dividir los límites del numerador y denominador obtenidos en el paso anterior. El orden de magnitud es encontrado al multiplicar estos cocientes por el cociente de potencias máximas de  $T$ . Por ejemplo, el orden de magnitud para  $\widehat{\delta}_k$  (y la distribución asintótica) proviene de la siguiente línea de código:

$$\text{deltalim}=(\text{numdelta}/\text{dendelta})*(T^{\text{expdeltanum}}/T^{\text{expdeltaden}});$$

6. Luego seguimos los mismos pasos para la varianza del error y el 2do elemento de la diagonal de  $(X'X)^{-1}$ .

7. De este código, obtenemos el comportamiento asintótico para los tres componentes del estadístico  $t$ , los cuales pueden ser luego ensamblados. Por ejemplo, en el caso mencionado arriba con tanto  $y$  como  $x$  siguiendo un modelo  $I(1)$ , el archivo de salida de *Mathematica* muestra que  $\widehat{\delta}_k = O_p(1)$ ,  $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2 = O_p(T)$ , y  $(X'X)_{22}^{-1} = O_p(T^{-2})$ , de lo cual podemos deducir que:  $\widehat{\delta}_k [T^{-1}\widehat{\sigma}_\varepsilon^2 T^2 (X'X)_{22}^{-1}]^{-1/2} = T^{-1/2}t_{\widehat{\delta}_k}$  converge, implicando que  $t_{\widehat{\delta}_k}$  diverge a tasa  $\sqrt{T}$ , o en otras palabras, que  $t_{\widehat{\delta}_k} = O_p(T^{1/2})$ .

Siguiendo este procedimiento para cada combinación de *PGD* en el Supuesto, es directo probar el siguiente teorema, el cual reúne los resultados principales. En el Teorema, una combinación de *PGD* es indicada por el par  $i - j$ , ( $i = 1, 2, 3$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ ) indicando que  $y_t$  es generada por el caso  $i$ , mientras  $x_t$  por el caso  $j$ , ambos definidos en el Supuesto. Así, por ejemplo, la combinación 1 - 3 corresponde al modelo (1) donde  $y_t$  es *ET* (caso 1), mientras  $x_t$  es  $I(1)$  (caso 3).

**TEOREMA 1.** *El orden de probabilidad de  $t_{\widehat{\delta}_k}$  en el modelo (1) depende de la combinación de *PGD* para  $y_t$  y  $x_t$  en el Supuesto, como sigue:*

- a)  $t_{\widehat{\delta}_k} = O_p(1)$  para la combinación de casos  $1 - j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  e  $i - 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;
  - b)  $t_{\widehat{\delta}_k} = O_p(T^{1/2})$  para la combinación de casos  $i - j$ ,  $i = 2, 3$  y  $j = 2, 3, 4$ ;
- donde  $x$  y  $y$  son generados de manera independiente.

El Teorema 1 muestra que, incluso cuando  $y_t$  y  $x_t$  son generados de manera independiente, la hipótesis nula será (espuriamente) rechazada en muestras grandes cuando ambas variables sigan un proceso *ETQ*, o un proceso de raíz unitaria. Además, este fenómeno prevalecerá cuando un proceso de raíz unitaria sencillo o doble interactúe con un proceso *ETQ*. En contraste con los resultados en Hassler (2000), Kim, *et. al.* (2004), y Noriega y Ventosa-Santaulària (2007), el estadístico no diverge cuando por lo menos una de las variables sigue una tendencia lineal.

El Cuadro 1 resume los hallazgos de arriba. La simetría de los resultados implica que el orden de probabilidad no depende del tipo de no-estacionariedad entre la variable dependiente y la explicativa.

**Cuadro 1.** Órdenes de probabilidad de  $t_{\hat{\delta}_k}$

| $y$    | $x$  |           |           |           |
|--------|------|-----------|-----------|-----------|
|        | $ET$ | $ETQ$     | $I(1)$    | $I(2)$    |
| $ET$   | 1    | 1         | 1         | 1         |
| $ETQ$  | 1    | $T^{1/2}$ | $T^{1/2}$ | $T^{1/2}$ |
| $I(1)$ | 1    | $T^{1/2}$ | $T^{1/2}$ | $T^{1/2}$ |

Los resultados indican que, mientras el tamaño de la muestra crezca, es más probable rechazar espuriamente la nula cuando ambas variables siguen algún tipo de choque permanente, ya sea determinístico o estocástico. Los resultados también indican que un rechazo espurio es asintóticamente menos probable cuando  $x_t$  o  $y_t$  (o ambas) sigue una tendencia lineal.<sup>9</sup>

Usando los resultados de Noriega y Ventosa-Santaulària (2006, 2007), el Cuadro 2 presenta los órdenes de probabilidad del estadístico  $t$  en un modelo de regresión como (1), pero sin horizonte, es decir, con  $k = 1$ . Los PGD son los mismos que aparecen en el Cuadro 1.

**Cuadro 2.** Órdenes de probabilidad de  $t_{\hat{\delta}}$ , ( $k = 1$ )

| $y$    | $x$       |           |           |           |
|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|        | $ET$      | $ETQ$     | $I(1)$    | $I(2)$    |
| $ET$   | $T^{3/2}$ | $T^{1/2}$ | $T$       | $T^{1/2}$ |
| $ETQ$  | $T^{1/2}$ | $T^{1/2}$ | $T^{1/2}$ | $T^{1/2}$ |
| $I(1)$ | $T$       | $T^{1/2}$ | $T$       | $T^{1/2}$ |

Una comparación entre los Cuadros 1 y 2 clarifica el efecto de usar un marco de horizonte largo: en siete de los doce casos, los órdenes de probabilidad en el caso de la regresión de horizonte largo son menores que aquéllos correspondientes al modelo de regresión sin horizonte. Además, en seis casos el estadístico no diverge. En cierta medida, el marco de horizonte largo mitiga el problema de la regresión asintótica espuria.

---

<sup>9</sup>Esto no es sorprendente, dado que la prueba de NLP en Fisher y Seater (1993) requiere la presencia de choques permanentes. Esto está cercanamente relacionado con el enfoque de Noriega, et. al. (2008), donde, bajo su noción determinística de NLP,  $x_t$  debería de ser neutral de largo plazo cuando hay quiebres estructurales en  $x_t$  (choques permanentes determinísticos), mientras  $y_t$  sigue una tendencia lineal determinística (i.e., sin choque permanente, ni estocástico ni determinístico).

Para verificar nuestros resultados de muestra grande, simulamos las distribuciones asintótica y empírica del estadístico  $t_{\hat{\delta}_k}$ . Considere primero la distribución asintótica del estadístico  $t_{\hat{\delta}_k}$  en la regresión de horizonte largo (1) bajo dos casos:<sup>10</sup> 1)  $t_{\hat{\delta}_k}^{(1)}$ , cuando  $y$  sigue un proceso  $ET$  y  $x$  un proceso  $I(1)$  con deriva, y 2)  $t_{\hat{\delta}_k}^{(2)}$ , cuando  $y$  sigue un proceso  $ETQ$  y  $x$  un proceso  $I(1)$  con deriva.

COROLARIO 1.

$$t_{\hat{\delta}_k}^{(1)} \xrightarrow{D} N^{(1)}(W) [D^{(1)}(W)]^{-1/2}$$

$$T^{-1/2} t_{\hat{\delta}_k}^{(2)} \xrightarrow{D} \gamma_y N^{(2)}(W) [D^{(2)}(W)]^{-1/2}$$

donde

$$\begin{aligned} N^{(1)}(W) &= \sigma_y \left\{ (1 - \kappa) \left[ \int_{\kappa}^1 W_x(r) dW_y(r) - \int_{\kappa}^1 W_x(r) dW_y(r - \kappa) \right] - \int_{\kappa}^1 W_{x1}(r, \kappa) W_{y1}(r, \kappa) dr \right\} \\ D^{(1)}(W) &= 2(\sigma_y^2 - \gamma_k) \left[ (1 - \kappa) \int_{\kappa}^1 W_{x1}^2(r, \kappa) dr - \left( \int_{\kappa}^1 W_{x1}(r, \kappa) dr \right)^2 \right] \\ N^{(2)}(W) &= \left[ \kappa(1 - \kappa) - \frac{1}{2} \gamma_y^2 \right] \int_{\kappa}^1 W_{x1}(r, \kappa) dr - (1 - \kappa) \\ &\quad \times \left[ \int_{\kappa}^1 r W_x(r) dr - \lambda_y \int_{\kappa}^1 W_x(r) dr - \int_{\lambda_y + \kappa}^1 r W_x(r) dr + (\lambda_y + \kappa) \int_{\lambda_y + \kappa}^1 W_x(r) dr \right] \\ D^{(2)}(W) &= 2\overline{W}_x \left[ \kappa(1 - \kappa) - \frac{1}{2} \lambda_y^2 \right] \int_{\kappa}^1 W_{x1}(r, \kappa) dr - 2(1 - \kappa) \overline{W}_x^2 \\ &\quad - 2 \left[ \kappa^2(1 - \kappa) - \lambda_y^2(\kappa - \frac{1}{3} \lambda_y) \right] \left[ \int_{\kappa}^1 W_{x1}(r, \kappa) dr \right]^2 + \frac{2}{3} (1 - \kappa - \frac{3}{4} \lambda_y) \lambda_y^3 \int_{\kappa}^1 W_{x1}^2(r, \kappa) dr, \end{aligned}$$

y,

$$\overline{W}_x \equiv \int_{\kappa}^1 r W_x(r) dr - \lambda_y \int_{\kappa}^1 W_x(r) dr - \int_{\lambda_y + \kappa}^1 r W_x(r) dr + (\lambda_y + \kappa) \int_{\lambda_y + \kappa}^1 W_x(r) dr.$$

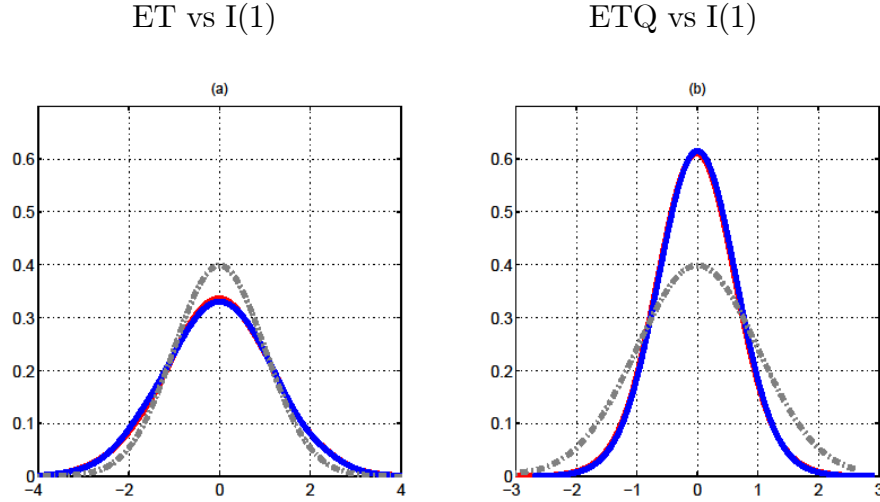
Luego simulamos estas fórmulas para los dos estadísticos  $t$  usando 10,000 réplicas, y presentamos las funciones de densidad resultantes como las líneas sólidas en la Figura 2.<sup>11</sup> Siguiendo, usando estos mismos  $PGD$ , corrimos una ecuación de regresión (1) 10,000 veces usando un (muy grande) tamaño de muestra de  $T = 10,000$  y calculamos las funciones de densidad empíricas de cada estadístico  $t$  (note que el correspondiente al segundo caso tiene que ser escalado por  $T^{1/2}$ , como se indicó en el Teorema 1). Las funciones de densidad empíricas resultantes también son mostradas en la Figura 2. Note que las gráficas de las densidades asintóticas y simuladas son indistinguibles entre si. Finalmente, una función de densidad normal estándar es también presentada en la Figura 2 como la línea punteada.

<sup>10</sup>Aquí presentamos 2 casos, pero hemos hecho este ejercicio para todas las combinaciones de  $PGD$  en el Supuesto, y obtuvimos resultados cualitativamente similares a través de las combinaciones.

<sup>11</sup>Note que las distribuciones asintóticas dependen de parámetros. Sin pérdida de generalidad, asumimos, para  $t_{\hat{\delta}_k}^{(1)}$ ,  $\kappa = 0.5$ ,  $\gamma_k = 0.2$ , y  $\sigma_y = 1.0$ . Para el caso de  $t_{\hat{\delta}_k}^{(2)}$ , asumimos  $\kappa = 0.5$ ,  $\gamma_y = 0.07$  y  $\lambda_y = 0.20$ . Aproximamos los procesos Wiener usando variables aleatorias normales estándar con un tamaño de muestra de 10,000.

Como puede verse en la Figura 2, los estadísticos  $t$  para estos dos modelos tienen distribuciones no-estándar. Por lo tanto, la inferencia usando un distribución normal estándar podría ser engañosa.

Figura 2



De Valkanov (2003), sabemos que en un marco de una raíz cercana a la unidad para ambas variables, podría ser factible simular la distribución asintótica de  $T^{-1/2}t_{\hat{\delta}_k}$ , para llevar a cabo inferencia correcta. Nuestro experimento de Monte Carlo revela, sin embargo, que cuando  $y_t$  o  $x_t$  es generado por un proceso  $ETQ$ , la distribución asintótica del cociente  $t$  (incluso cuando es escalado correctamente) no está libre de parámetros, complicando así el ejercicio de simulación. En este caso, el procedimiento inferencial propuesto por Valkanov (2003) ya no resulta factible.

El fenómeno de regresión espuria en un marco de regresión de horizonte largo puede ser investigado en mayor detalle al analizar el comportamiento del estadístico  $t$  en el modelo (1) cuando  $x_t$  y  $y_t$  tienen una relación de largo plazo.<sup>12</sup> Esto nos permitirá diseñar un procedimiento alternativo para probar una relación lineal, bajo formas diferentes de  $PGD$  para  $x_t$  y  $y_t$ . Siguiendo el procedimiento esbozado arriba, el siguiente Teorema, el cual presenta los aspectos asintóticos de este caso, puede ser fácilmente probado.

TEOREMA 2. *Permitamos que  $x_t$  sea generada ya sea como:*

- i) (raíz unitaria)  $x_t = X_0 + \mu_x t + \sum_{i=1}^t u_{xi}$ , o*
  - ii) (tendencia quebrada)  $x_t = \mu_x + \beta_x t + \gamma_x DT_{xt} + u_{xt}$ ,*
- y  $y_t$  sea generada como:*

<sup>12</sup>En el contexto de dinero y producción, esto implicaría que no se cumple la neutralidad monetaria.

$$y_t = \mu_y + \beta_y x_t + u_{yt}$$

con las innovaciones  $\{u_{zt}\}_1^\infty$ , para  $z = y, x$ , satisfaciendo las condiciones del Lema 1. Permitamos que  $\frac{k}{T} \rightarrow \kappa \in (0, 1)$  cuando ambos  $T \rightarrow \infty$  y  $k \rightarrow \infty$ . Luego, el estimador  $\widehat{\delta}_k$  de (1) y su estadístico  $t_{\widehat{\delta}_k}$  tienen las siguientes propiedades asintóticas:

- a)  $\widehat{\delta}_k \xrightarrow{p} \beta_y$
- b)  $t_{\widehat{\delta}_k} = O_p(T^{3/2})$

Note que bajo el caso *i*) del Teorema 2,  $x_t$  y  $y_t$  son  $I(1)$  y están cointegradas,  $CI(1, 1)$ , debido a que  $u_{yt}$  se asume como estacionaria. Bajo estas circunstancias, como la parte *b*) del Teorema 2 lo muestra, el estadístico  $t$  diverge a la (rápida) tasa  $T^{3/2}$ , implicando que la hipótesis nula  $H_0 : \delta_k = 0$  siempre será asintóticamente rechazada, guiando a la conclusión correcta.

Este resultado, junto con los resultados del Teorema 1, nos permiten hacer el siguiente razonamiento: sabemos por el Teorema 1 que el estadístico  $t$  divergirá a tasa  $T^{1/2}$  cuando hay choques permanentes a las variables, o no divergirá, cuando no hay choques permanentes en por lo menos una de las variables. Por otro lado, cuando  $x_t$  y  $y_t$  están  $CI$  (Teorema 2), el estadístico  $t$  divergirá a tasa  $T^{3/2}$ , produciendo inferencia correcta.

En base a este contexto, proponemos escalar el estadístico  $t$  por tamaño de muestra,  $T$ , y definimos  $t_{\widehat{\delta}_k}^R \equiv T^{-1}t_{\widehat{\delta}_k}$ . El siguiente Corolario formalmente enuncia estas ideas.

**COROLARIO 2.**

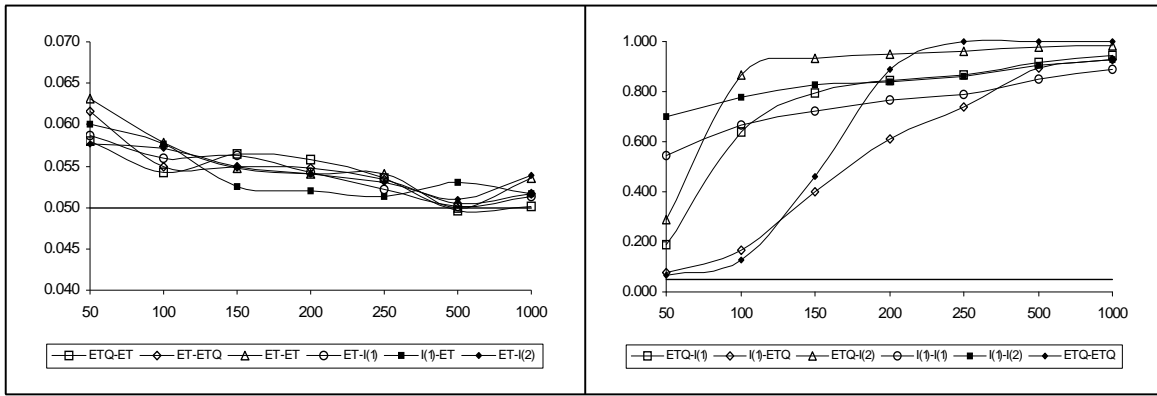
- 1a)  $t_{\widehat{\delta}_k}^R = O_p(T^{-1/2})$  para todos los casos espurios (aquéllos del Teorema 1 con un choque permanente)
- 1b)  $t_{\widehat{\delta}_k}^R = O_p(T^{-1})$  para todos los casos espurios (aquéllos del Teorema 1 sin un choque permanente)
- 2)  $t_{\widehat{\delta}_k}^R = O_p(T^{1/2})$  para todos los casos no espurios (aquéllos del Teorema 2)

Por lo tanto, al dividir por  $T$  garantizaremos asintóticamente inferencia correcta, sin importar que las variables tengan una relación de largo plazo o no: cuando las variables son independientes, el estadístico  $t$  escalado convergerá a cero, no rechazando así la nula de no relación; por otro lado, cuando las variables están cointegradas el estadístico  $t$  escalado divergirá, indicando correctamente una relación de largo plazo. Argumentos similares aplican para el caso *ii*) del Teorema 2, donde  $x_t$  es perturbada por un choque permanente determinístico, en lugar de uno estocástico.

## 4 Resultados de la Simulación

Para evaluar la utilidad de nuestros resultados asintóticos en muestras finitas, calculamos las tasas de rechazo para  $t_{\hat{\delta}_k}$  en el modelo (1), usando un valor crítico de 1.96 (nivel de 5%) para una distribución normal estándar, en base a datos simulados, para varios tamaños de muestra y combinaciones de  $PGD$  en el Supuesto. Esto es obviamente incorrecto desde nuestro punto de vista, dado que las distribuciones de muestra finita y asintótica de  $t_{\hat{\delta}_k}$  dependen de parámetros, y podrían desviarse de la normalidad. Sin embargo, para el amplio conjunto de parámetros seleccionados para las simulaciones presentadas abajo, el comportamiento de muestra finita tiende a apoyar los resultados asintóticos presentados arriba. La Figura 3 presenta tasas de rechazo para las 12 posibles combinaciones del Cuadro 1.

Figura 3



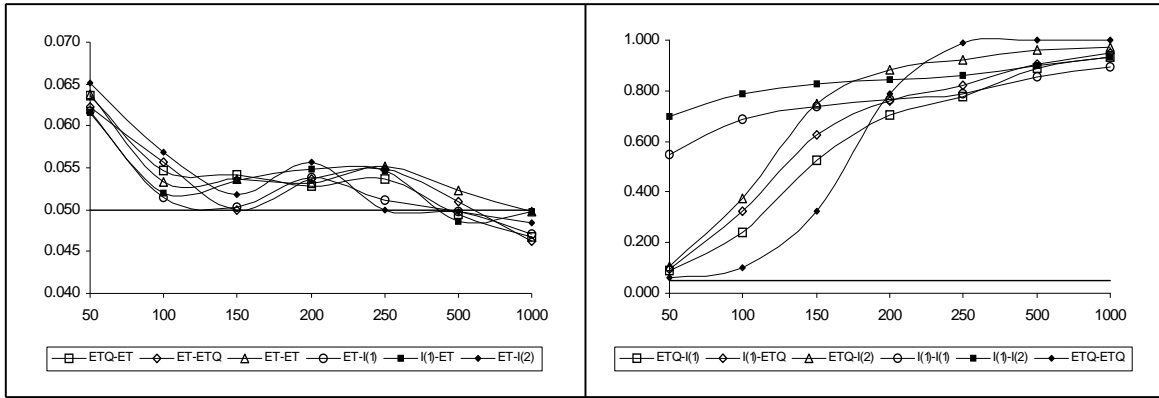
Las gráficas de arriba del lazo izquierdo describen las combinaciones donde al menos una de las variables sigue un proceso  $ET$ . Como puede notarse, las tasas de rechazo tienden a converger al nivel nominal de 5% a medida que el tamaño de muestra crece; i.e., no hay rechazo espurio cuando  $x_t$  o  $y_t$  son estacionarias en tendencia, consistente con nuestros resultados asintóticos. Por otro lado, y también en línea con los resultados límite de arriba, las gráficas de arriba del lado derecho muestran que las tasas de rechazo tienden a uno conforme el tamaño de la muestra crece, cuando ni  $x_t$  ni  $y_t$  es generada por un proceso  $ET$ . Como puede verse, para combinaciones tales como  $I(1) - I(1)$ ,  $I(1) - I(2)$ ,  $ETQ - I(1)$ , y  $ETQ - I(2)$ , las tasas de rechazo están por encima de 60% para muestras tan pequeñas como  $T = 100$ .

Los resultados de la Figura 3 fueron calculados asumiendo  $\lambda_x < \lambda_y < \kappa$ , y  $\lambda_y + \kappa < 1$ . Por otro lado, la Figura 4 asume que  $\kappa < \lambda_x < \lambda_y$ , y  $\lambda_y + \kappa > 1$ . El comportamiento similar de las tasas de rechazo de ambas Figuras implica que los resultados no dependen de si los quiebres en las variables ocurren antes o después del final del horizonte.<sup>13</sup>

<sup>13</sup>En particular, asumimos, para los resultados de la Gráfica 3, que :  $\lambda_y = 0.40$ ,  $\lambda_m = 0.25$ , y  $\kappa = 0.50$ , mientras que para los de la Gráfica 4:  $\lambda_y = 0.80$ ,  $\lambda_m = 0.65$ , y  $\kappa = 0.50$ . Para el resto de los parámetros



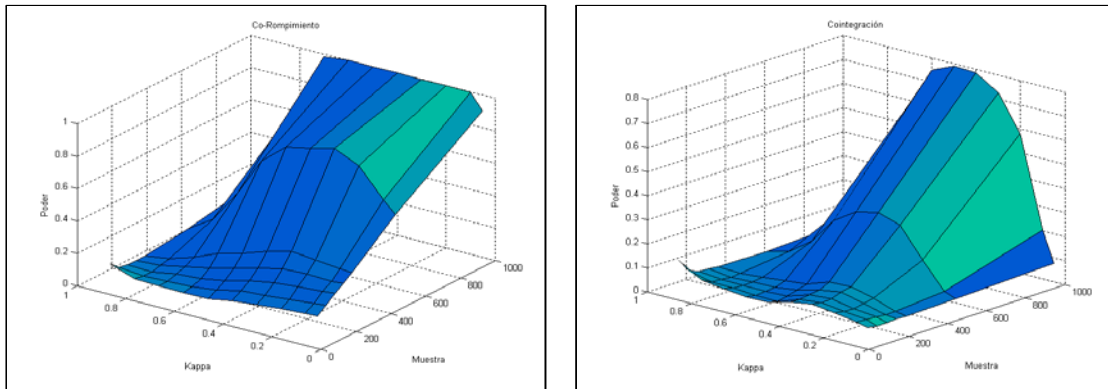
Figura 4



Pasando a consideraciones de potencia, las Figuras 5-9 muestran como ésta está relacionada con algunos parámetros de los PGD del Teorema 2, como el tamaño del horizonte, o el tamaño del quiebre. Por ejemplo, la Figura 5 muestra la potencia contra  $\kappa$ , el tamaño de horizonte, para diferentes tamaños de muestra.

Figura 5

*Potencia y longitud de horizonte*



Como en este caso la nula de no relación es falsa, simulamos dos posibilidades: las variables tienen un co-rompimiento<sup>14</sup> (Figura de arriba del lado izquierdo), o cointegran (Figura de arriba del lado derecho). En el caso del co-rompimiento, la potencia tiende a uno uniformemente con  $\kappa$ , conforme la muestra crece (con la excepción de valores de  $\kappa$  cercanos a cero o a uno). En el caso de la cointegración, sin embargo, la potencia es maximizada para valores de  $\kappa$  cercanos a 0.5, a medida que la muestra se incrementa.<sup>15</sup>

usamos,  $\beta_y = 0.09$ ,  $\beta_m = 0.06$ ,  $\theta_y = \theta_m = 0$ ,  $\gamma_y = 0.07$ ,  $\gamma_m = 0.04$ ,  $\sigma_y = \sigma_m = 1$ . Finalmente, para los procesos con tendencias determinísticas:  $\mu_y = 0.20$ ,  $\mu_m = 0.10$ , para procesos con tendencias estocásticas:  $\mu_y = 0.09$ ,  $\mu_m = 0.06$ . Experimentamos con muchas diferentes combinaciones de valores de parámetros y obtuvimos resultados cualitativamente similares.

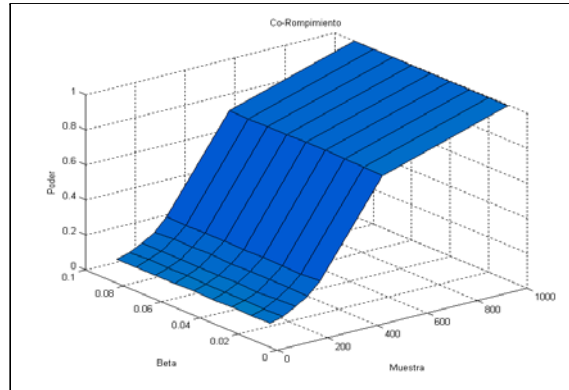
<sup>14</sup>Usamos el término 'co-rompimiento' para indicar una relación lineal entre dos variables estacionarias en tendencia quebrada no-independientes.

<sup>15</sup>Este resultado puede ser usado como una guía en trabajo aplicado, si no existe ninguna guía para la determinación de la longitud del horizonte.

La Figura 6 muestra la potencia para diferentes valores de la tendencia lineal en la variable explicativa ( $\beta_x$  en Teorema 2). Como puede verse, ésta se incrementa uniformemente con  $\beta_x$ .<sup>16</sup>

**Figura 6**

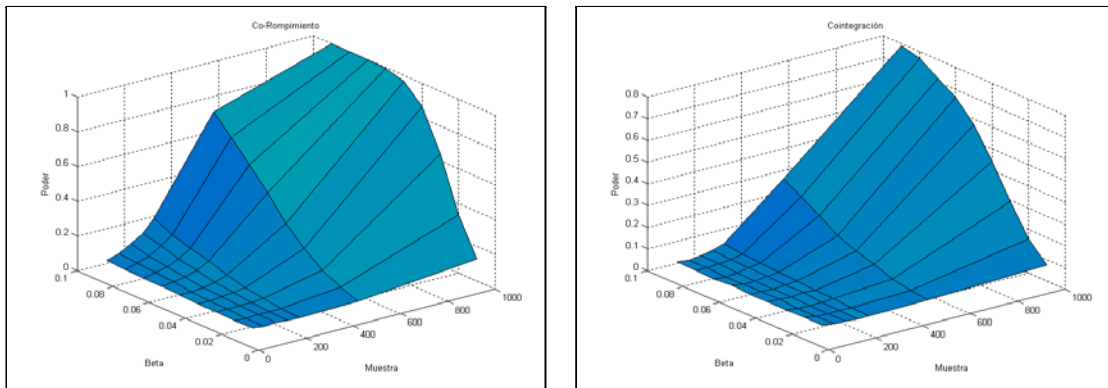
*Potencia y tamaño de la tendencia lineal*



La Figura 7 muestra como la potencia se incrementa con  $\beta_y$ , como era de esperarse, ya que valores grandes de este parámetro están asociados a una relación significativa entre  $x$  y  $y$  (a una tasa más rápida para el caso del co-rompimiento). Resultados similares son obtenidos para el efecto sobre la potencia del tamaño del quiebre, como se describe en la Figura 8. De nuevo, la potencia se incrementa con el tamaño del quiebre.

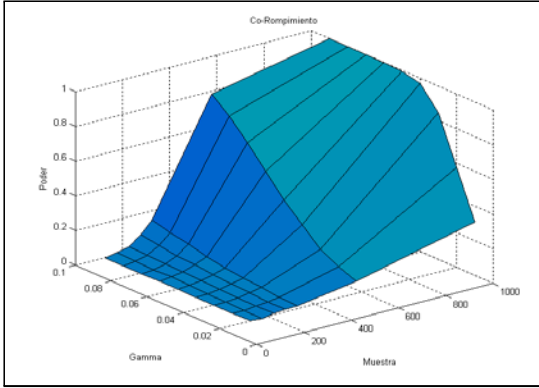
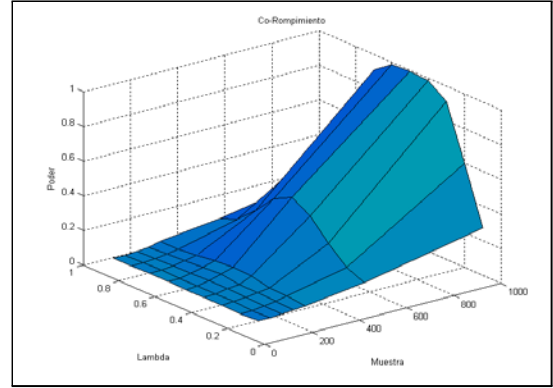
**Figura 7**

*Potencia y fuerza de la relación*



Finalmente, la Figura 9 muestra que la potencia alcanza su máximo cuando el parámetro de la fecha de quiebre se aproxima a 0.5.

<sup>16</sup>Los valores para  $\beta_x$  están basados en valores estimados obtenidos de una aplicación empírica con datos internacionales anuales de dinero y producción presentados en la siguiente sección.

**Figura 8***Potencia y tamaño del quiebre de tendencia***Figura 9***Potencia y localización del quiebre de tendencia*

Si bien es cierto que los experimentos de arriba podrían sugerir la presencia de baja potencia en muestras pequeñas, el principal propósito de estos experimentos, sin embargo, fue el de aclarar la relación entre algunos parámetros clave, tamaños de muestra y potencia de la prueba.<sup>17</sup>

## 5 Aplicación Empírica: Regresiones de horizonte largo y neutralidad monetaria

Un principio central de macroeconomía es la proposición de neutralidad monetaria, la cual dice que no debería de haber efectos reales de largo plazo de un cambio permanente y no anticipado en el nivel del dinero. Una de las principales herramientas para probar esta proposición macro clave es la prueba no estructural diseñada por Fisher y Seater (1993, FS de ahora en adelante). Esta prueba depende de las propiedades de series de tiempo de  $x_t$  y  $y_t$ , y usa como vehículo de prueba una regresión de horizonte largo:

$$\left[ \sum_{j=1}^k \Delta^{(y)} y_{t-j+1} \right] = \alpha_k + \delta_k \left[ \sum_{j=1}^k \Delta^{(x)} x_{t-j+1} \right] + \varepsilon_{kt} \quad (2)$$

donde  $y$  y  $x$  son la producción real y el dinero exógeno, respectivamente. Teóricamente,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k \equiv \delta$ , da un estimado de la derivada de largo plazo de la producción real respecto a un choque permanente exógeno estocástico en el nivel del dinero.

Es práctica común asumir que en la regresión de horizonte largo mostrada arriba la no-estacionariedad potencial en las variables toma la forma de una raíz unitaria. Típicamente,

<sup>17</sup>Tenemos que tener presente que la potencia es sensible a los valores de los parámetros escogidos. El tema de baja potencia en la regresión de horizonte largo se discute en Coe y Nason (2003, 2004).

en aplicaciones empíricas, las propiedades de series de tiempo de los datos de  $x_t$  y  $y_t$  son investigadas a través de pruebas de raíz unitaria, como la Dickey-Fuller, Phillips-Perron, KPSS, o Ng-Perron.<sup>18</sup> Noriega (2004), por ejemplo, presenta resultados de NLP usando un conjunto de datos internacionales discutiendo a la vez el uso de estas pruebas para las propiedades de series de tiempo de los datos. Él encuentra que la NLP no se sostiene para varios países en su muestra. Más recientemente, NSV encuentran que las conclusiones sobre neutralidad monetaria son sensibles a la presencia de quiebres estructurales en la función de tendencia de  $x_t$  y  $y_t$ .

Dada esta evidencia, estimamos la ecuación (2) al permitir que no solamente  $\langle z \rangle = 1$ , pero también  $\langle z \rangle = 0$ , en la forma de tendencias lineales y tendencias lineales con quiebres, y  $\langle x \rangle = 2$ . Por lo tanto, el PGD para  $z = y, x$  pudiera ser no solamente un proceso  $I(1)$ , como lo requiere la prueba FS, pero también una combinación de tendencias lineales, tendencias quebradas y tendencias estocásticas.

La neutralidad del dinero es medida por FS a través de la elasticidad de largo plazo, o la Derivada de Largo Plazo ( $DLP$ ) de  $y_t$  respecto a los cambios permanentes exógenos estocásticos en  $x_t$ :

$$DLP_{y,x} \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial y_{t+k} / \partial u_t}{\partial x_{t+k} / \partial u_t}$$

donde  $u_t$  es una variable aleatoria que representa el choque a  $x_t$ . El límite del cociente mide el efecto último de una perturbación monetaria (estocástica) sobre la producción real relativa al efecto último de la perturbación sobre la variable monetaria. Teóricamente,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k \equiv \delta$ , da un estimado de  $DLP$ , donde  $\delta_k$  es el coeficiente de una regresión MCO en (2).

Como fue explicado por FS, para llevar a cabo una prueba de Neutralidad de Largo Plazo (NLP) las propiedades de series de tiempo de  $y_t$  y  $x_t$  deberían obedecer ciertas restricciones. Por ejemplo, la variable dinero debería contener un choque permanente (identificado en la forma de una raíz unitaria) para que la NLP hiciera sentido, de otra manera no habría cambios permanentes estocásticos en el dinero que pudieran afectar la producción real. Bajo este supuesto, y si  $y_t$  es estacionaria, entonces la NLP se sostiene, debido a que los cambios permanentes en  $x_t$  no pueden estar asociados a cambios permanentes no existentes en  $y_t$ . Por otro lado, cuando  $y_t$  y  $x_t$  siguen un proceso de raíz unitaria, la NLP se puede probar, y Fisher y Seater (1993) proponen una prueba muy simple basada en el estadístico  $t$  del parámetro de la pendiente en la regresión de horizonte largo (2),  $t_{\delta_k}$ .

Como una aplicación de algunos de los resultados teóricos derivados de este documento, usamos datos internacionales de dinero y producción de NSV para calcular el estadístico

---

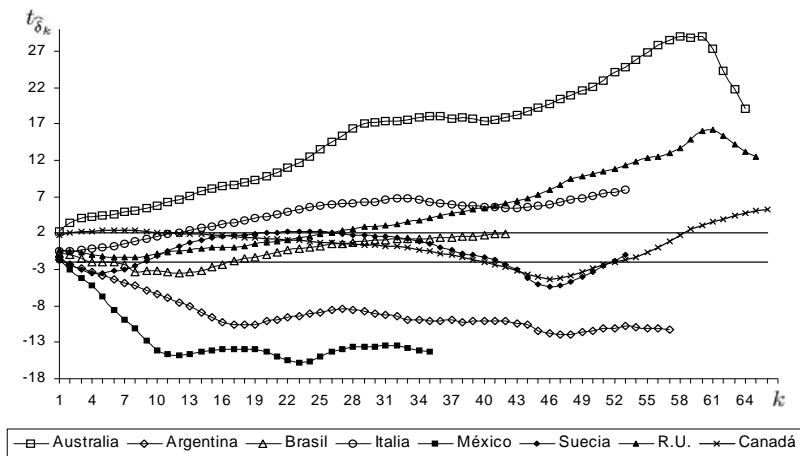
<sup>18</sup>Ver, respectivamente, Said y Dickey (1984), Phillips y Perron (1988), Kwiatkowski, et. al. (1992) y Ng y Perron (2001).

$t$  para probar la neutralidad de largo plazo del dinero, usando un modelo de regresión de horizonte largo (2), como en FS. Los datos consisten en observaciones anuales en logaritmos del PIB real y un agregado monetario para Australia (1870-1997), Argentina (1884-1996), Brasil (1912-1995), Canadá (1870-2000), Italia (1870-1997), México (1932-2000), Suecia (1871-1988) y el Reino Unido (1871-2000).<sup>19</sup>

NSV encuentran que para Australia, Suecia y el Reino Unido  $y_t$  y  $x_t$  siguen un modelo  $ETQ$ . Para Canadá,  $y_t$  sigue un modelo  $ET$ , mientras  $x_t$  sigue uno de  $ETQ$ . Para Argentina y México  $y_t$  sigue un modelo  $ETQ$  mientras  $x_t$  sigue un modelo  $I(1)$ . Para Brasil  $y_t$  sigue un modelo  $ETQ$  mientras  $x_t$  sigue un modelo  $I(2)$ . Finalmente, para Italia ambas variables aparentan ser  $I(1)$ . Debido a que la producción canadiense es estacionaria, la NLP se sostiene por construcción, como se discutió en NSV. Para el resto de los países, el estadístico  $t$  debería ser, de acuerdo a nuestros resultados en el Teorema 1, normalizado por  $T^{1/2}$  para prevenir la divergencia del estadístico, y así indicar asintóticamente un rechazo espurio de la NLP.

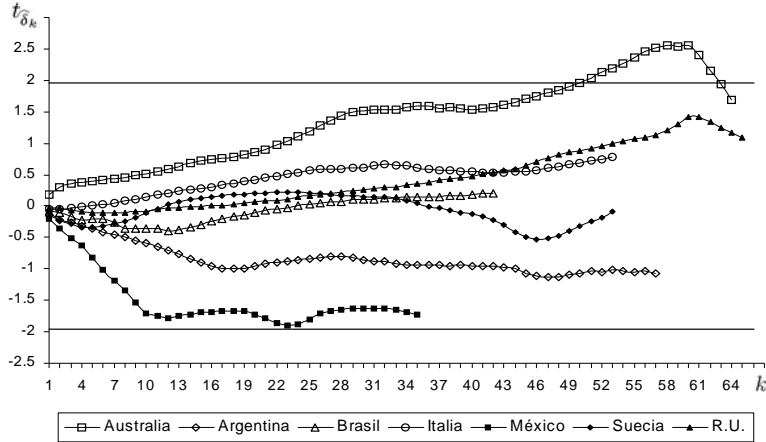
La Figura 10 muestra el comportamiento del estadístico  $t_{\delta_k}$  para probar la hipótesis nula  $H_0 : \delta_k = 0$  en la regresión de horizonte largo (2) para valores de  $k = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}T$ .<sup>20</sup>

**Figura 10**



<sup>19</sup>Otros dos países, Dinamarca y los Estados Unidos, se dejan fuera del análisis debido a que el dinero y la producción para estos dos países se encuentra que son  $I(0)$ , causando que la NLP no pueda ser evaluada. Ver Noriega et. al (2008) para los detalles. El conjunto de datos está disponible mediante una solicitud a los autores.

<sup>20</sup>Nuestra selección de  $\kappa = 1/2$  está basada en nuestros resultados de la simulación, los cuales muestran que la potencia puede ser maximizada cuando la longitud del horizonte es de la mitad del tamaño de la muestra.



De la Figura 10, la primera gráfica muestra el comportamiento del estadístico no-normalizado, mientras que la segunda exhibe el comportamiento del estadístico normalizado. El efecto de la normalización es muy claro: para todos los países en la muestra, la neutralidad monetaria no es rechazada. Si hubiéramos normalizado por  $T$  en lugar de por  $T^{1/2}$ , como se discutió arriba, las secuencias de los estadísticos  $t$  habrían todas ellas estado más cerca de cero, indicando un no-rechazo más claro de la neutralidad monetaria. Note sin embargo que los valores críticos usados en la Figura 10 asumen normalidad y por lo tanto sirven únicamente para un propósito ilustrativo.

Para llevar a cabo la inferencia sobre neutralidad monetaria usando valores críticos apropiados, usamos métodos bootstrap para simular la distribución del estadístico  $t$  en la RHL (2).<sup>21</sup> En particular, para cada país, simulamos  $t_{\hat{\delta}_k}$  usando datos de producción y dinero generados por los modelos identificados por NSV y descritos arriba en el Supuesto (ver Sección 2).

Usamos el caso de Australia para ejemplificar los pasos incluidos en las simulaciones.<sup>22</sup> NSV encontraron que la producción sigue un modelo  $ETQ$  con tres quiebres de nivel, mientras el dinero sigue un modelo  $ETQ$  con dos quiebres de nivel y tendencia. Así pues, para las series de tiempo de producción ( $y_t$ ) y dinero ( $m_t$ ) de Australia, estimamos por MCO los siguientes modelos  $ETQ$ :<sup>23</sup>

$$\Delta y_t = \mu_y + \beta_y t + \sum_{i=1}^3 \theta_{yi} DU_{it} + \alpha_y Y_{t-1} + \sum_{i=1}^4 a_{yi} \Delta y_{t-i} + \varepsilon_{yt},$$

<sup>21</sup>Para una exposición del método bootstrap ver Davidson y G. MacKinnon (2004).

<sup>22</sup>El Cuadro A1 en el Apéndice 3 resume los modelos usados para simular el estadístico  $t$  de la RHL para cada país, en base a los modelos identificados en NSV.

<sup>23</sup>Ver la Figura 1 para una representación gráfica de estas series.

$$\Delta m_t = \mu_m + \beta_m t + \sum_{i=1}^2 \theta_{mi} DU_{it} + \sum_{i=1}^2 \gamma_{mi} DT_{it} + \alpha_m m_{t-1} + \sum_{i=1}^1 a_{mi} \Delta m_{t-i} + \varepsilon_{mt},$$

Luego usamos los parámetros estimados de esos modelos para generar 10,000 muestras de  $\Delta y_t$ ,  $t = 6, \dots, T$ , y  $\Delta m_t$ ,  $t = 3, \dots, T$ , con residuales seleccionados aleatoriamente (con reemplazo).<sup>24</sup> Para cada muestra generada, la ecuación de regresión de horizonte largo (2) es estimada, y los 10,000 valores correspondientes a  $t_{\hat{\delta}_k}$  son usados para construir la función de densidad empírica de este estadístico.<sup>25</sup> El Cuadro 3 reporta los valores críticos de estas distribuciones, junto con el estadístico  $t$  reescalado por  $T^{1/2}$ .<sup>26</sup>

Como puede verse, para Australia, Italia y México, la hipótesis nula de neutralidad de largo plazo puede ser rechazada a un nivel de 10%, pero no al de 5% o menor.

**Cuadro 3.** Resultados de la pruebas de neutralidad monetaria de largo plazo

| País      | Valores Críticos |        |        |       |       |       | Estadístico $t$<br>calculado |
|-----------|------------------|--------|--------|-------|-------|-------|------------------------------|
|           | 1%               | 5%     | 10%    | 90%   | 95%   | 99%   |                              |
| Argentina | -2.009           | -1.656 | -1.451 | 1.467 | 1.605 | 2.025 | -1.061                       |
| Australia | -0.385           | -1.102 | 0.042  | 1.652 | 1.840 | 2.232 | 1.689*                       |
| Brasil    | -0.637           | -0.472 | -0.397 | 0.388 | 0.459 | 0.612 | 0.293                        |
| Canadá    | -0.992           | -0.709 | -0.586 | 0.562 | 0.686 | 0.938 | 0.425                        |
| Italia    | -2.015           | -1.339 | -1.099 | 1.109 | 1.392 | 2.011 | 1.358*                       |
| México    | -2.840           | -2.038 | -1.670 | 1.661 | 2.005 | 2.702 | -1.723*                      |
| Suecia    | 0.288            | 0.383  | 0.429  | 1.010 | 1.081 | 1.219 | 0.525                        |
| R.U.      | 0.423            | 0.564  | 0.637  | 1.639 | 1.773 | 2.006 | 1.094                        |

\*Indica rechazo a un nivel de 10%

Entonces, usando un nivel de 5%, no es posible rechazar la neutralidad monetaria de largo plazo para los países analizados. Como comentario final, note que los mismos resultados cualitativos son obtenidos si el estadístico  $t$  es escalado por  $T$  (como se discutió en la Sección 3) en lugar de por  $T^{1/2}$ , i.e., los resultados de neutralidad no se ven afectados.

<sup>24</sup>Note que para la producción, usamos las primeras 5 observaciones como condiciones iniciales, mientras que para el dinero tomamos las primeras 2 observaciones como condiciones iniciales.

<sup>25</sup>Las 10,000 estimaciones de la ecuación de RHL (2) usan un valor de  $k = \frac{1}{2}T$ , debido a que esta selección parece maximizar la potencia, como se encontró en nuestros experimentos de simulación.

<sup>26</sup>Note que el estadístico  $t$  para Canadá no fue reescalado, debido a que se encontró que la producción de este país es estacionaria en tendencia. Todo los cálculos fueron llevados a cabo en Matlab 7.0. Los datos y los códigos están disponibles en <http://dl.dropbox.com/u/1307356/Arxius%20en%20la%20web/LHR%20code/Programs.zip>

## 6 Conclusiones

Mostramos que la presencia de una regresión de horizonte largo espuria es muy probable cuando  $x_t$  y  $y_t$  son perturbadas ya sea por un choque permanente determinístico o por uno estocástico, tanto asintóticamente como en muestras finitas. En otras palabras, cuando  $x_t$  y  $y_t$  son generadas de manera independiente, y siguen una combinación de tendencias quebradas y raíces unitarias, el estadístico  $t$  para una relación lineal en una regresión de horizonte largo, divergirá a infinito (a una tasa  $T^{1/2}$ ), indicando asintóticamente una relación espuria. Por otro lado, cuando una de las variables sigue un proceso estacionario en tendencia, nuestros resultados indican que el estadístico  $t$  no diverge. Nuestros resultados de muestra grande son confirmados por las simulaciones.

También analizamos el caso cuando  $x_t$  y  $y_t$  están cointegradas. En este caso nuestros resultados indican que la divergencia aún ocurre, pero a una tasa mucho más rápida ( $T^{3/2}$ ). La diferencia en las tasas de divergencia nos permitieron proponer un procedimiento de inferencia asintóticamente correcta, el cual funciona independientemente de si las variables tienen una relación de largo plazo o no.

Como una aplicación de nuestros resultados, reanalizamos los resultados de NSV y encontramos que la neutralidad de largo plazo parece sostenerse para todos los países en la muestra.



# Referencias

Assaf, A. (2008), "Nonstationarity in real exchange rates using unit root tests with a level shift at unknown time ", *International Review of Economics and Finance*, 17 (2), 269-278.

Caner, M., y B. Hansen (2001), "Threshold autoregression with a unit root", *Econometrica*, 69, 1555-96.

Chen, S. S. y Y. H. Chou (2010), "Exchange rates and fundamentals: evidence from long-horizon regression tests", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 72, 1, 63-88.

Coe, P. J. y J. M. Nason (2003), "The long-horizon regression approach to monetary neutrality: how should the evidence be interpreted?", *Economics Letters*, 78, 351-356.

Coe, P. J. y J. M. Nason (2004), "Long-run monetary neutrality and long-horizon regressions", *Journal of Applied Econometrics*, 19, 355-373.

Coenen, G. y J.-L. Vega (2001), "The demand for M3 in the Euro area", *Journal of Applied Econometrics*, 16, 727-48.

Cook, S. (2005), "The stationarity of consumption-income ratios: Evidence from minimum LM unit root testing", *Economics Letters*, 89 (1), p.55-60.

Davidson, R. y J. G. MacKinnon (2004), *Econometric Theory and Methods*, Oxford University Press.

Darne, O. (2009), "The uncertain unit root in real GNP: A re-examination", *Journal of Macroeconomics*, 31 (1), 153-166.

Diebold, F. y A. S. Senhadji, (1996), "The uncertain unit root in real GNP: Comment", *American Economic Review*, 86(5), 1291-1298.

Fisher, M. E. y J. J. Seater (1993), "Long-run neutrality and superneutrality in an ARIMA framework", *American Economic Review*, 83(3), 402-415.

Haldrup, N. (1998), "An econometric analysis of  $I(2)$  variables", *Journal of Economic Surveys*, 12(5), 595-650.

Hamilton, J. (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press, New Jersey.

Hassler, U. (2000), "Simple regressions with linear time trends", *Journal of Time Series Analysis*, 21, 27-33.

Herrndorf, N. (1984), "A functional central limit theorem for weakly dependent sequences of random variables", *Annals of Probability*, 12, 141-153.

Juselius, K. (1996), "A structured VAR under changing monetary policy", *Journal of Business and Economic Statistics*, 16, 400-12.

Juselius, K. (1999), "Price convergence in the medium and long run: An  $I(2)$  analysis of six price indices", in Engle, R. F. and H. White (eds.): *Cointegration, Causality and Forecasting. A Festschrift in Honour of Clive W. J. Granger*, Oxford University Press.

Kapetanios, G., Shin, Y., y A. Snell (2003), "Testing for a unit root in the nonlinear STAR framework", *Journal of Econometrics*, 112, 359-79.

Kim, T.-H., Y.-S. Lee y P. Newbold (2004), "Spurious regressions with stationary processes around linear trends", *Economics Letters*, 83, 257-262.

Kim, D. y P. Perron (2009), "Unit root tests allowing for a break in the trend function at an unknown time under both the null and alternative hypotheses", *Journal of Econometrics*, 148(1), 1-13.

Kwiatkowski, D., P. Phillips, P. Schmidt y Y. Shin (1992), "Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root", *Journal of Econometrics*, 54, 159-178.

Lee, J. (2007), "Fractionally integrated long horizon regressions", *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, 11(1), 1-18.

Maslyuk, S., R. Smyth (2008), "Unit root properties of crude oil spot and futures prices", *Energy Policy*, 36 (7), 2591-2600.

MATHEMATICA 6 (2007), Wolfram Research Inc.

McLeish, D. L. (1975), "A maximal inequality and dependent strong laws", *Annals of Probability*, 3, 829-839.

Murray, C. y C. Nelson, (2000) "The uncertain trend in U.S. GDP", *Journal of Monetary Economics*, 46, 79-95.

Muscattelli, V. A. y F. Spinelli (2000), "The long-run stability of the demand for  $x_t$ : Italy 1861-1996", *Journal of Monetary Economics*, 45, 717-39.

Nelson, C. y C. Plosser (1982), "Trends and random walks in macroeconomic time series: Some evidence and implications", *Journal of Monetary Economics*, September, 139-162.

Nelson, C, Piger, J., y Zivot, E. (2001), "Markov regime switching and unit root tests", *Journal of Business & Economic Statistics*, 19, 404-415.

Ng, S. y P. Perron (2001), "Lag length selection and the construction of unit root tests with good size and power", *Econometrica*, 69(6), 1519-54.

Nielsen, H. B. (2002), "An  $I(2)$  cointegration analysis of price and quantity formation in Danish manufactured exports", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 64(5), 449-72.

Noriega, A. (2004), "Long-run monetary neutrality and the unit-root hypothesis: further international evidence", *North American Journal of Economics and Finance*, 15, 179-197.

Noriega, A. y D. Ventosa-Santaulària (2006), "Spurious regression under broken-trend stationarity", *Journal of Time Series Analysis*, 27(5), 671-684.

Noriega, A. y D. Ventosa-Santaulària (2007), "Spurious regression and trending variables", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 69(3), 439-444.

Noriega, A., L. M. Soria y R. Velázquez (2008), "International evidence on stochastic and deterministic monetary neutrality", *Economic Modelling*, 25(6), 1261-1275.

- Papell, D. y R. Prodan (2004), "The uncertain unit root in US real GDP: Evidence with restricted and unrestricted structural change", *Journal of Money, Credit and Banking*, 36, 423–427.
- Perron, P. (1989), "The great crash, the oil price shock, and the unit root hypothesis", *Econometrica*, 57, 1361-1401.
- Perron, P. (1992), "Trend, unit root and structural change: A multi-country study with historical data", in *Proceedings of the Business and Economic Statistics Section*, American Statistical Association, 144-149.
- Perron, P. (1997), "Further evidence on breaking trend functions in macroeconomic variables", *Journal of Econometrics*, 80, 355-385.
- Phillips, P.C.B. (1986), "Understanding spurious regressions in econometrics", *Journal of Econometrics*, 33, 311-340.
- Phillips, P.C.B. (1987), "Time series regression with a unit root", *Econometrica*, 55(2), 277-301.
- Phillips, P.C.B. y P. Perron (1988), "Testing for a unit root in time series", *Biometrika*, 75, 335-346.
- Rahman, A. y S. Saadi, (2008), "Random walk and breaking trend in financial series: An econometric critique of unit root tests", *Review of Financial Economics*, 17 (3), 204-212.
- Richardson, M. y J. Stock, (1989), "Drawing inferences from statistics based on multiyear returns", *Journal of Financial Economics*, 25, 323-348.
- Rudebusch, G. D. (1993), "The uncertain unit root in real GNP", *American Economic Review*, 83(1), 264-272.
- Said, E.S. y D.A. Dickey (1984), "Testing for unit roots in autoregressive-moving average models of unknown order", *Biometrika*, 71, 599-607.
- Valkanov, R. (2003), "Long-horizon regressions: theoretical results and applications", *Journal of Financial Economics*, 68, 201-232.
- Vougas, D. (2007), "Is the trend in post-WW II US real GDP uncertain or non-linear?", *Economics Letters*, 94(3), 348-355.

# Apéndice 1

## Prueba del Lema 1.

Para probar la parte a) note que  $\sum_{t=k+1}^T (u_{zt} - u_{zt-k}) = \sum_{j=1}^k u_{zT-j+1} - \sum_{j=1}^k u_{zj}$ , donde  $\sum_{j=1}^k u_{zT-j+1} = \sum_{j=1}^T u_{zj} - \sum_{j=1}^{T-k} u_{zj}$ . Así pues,  $\sum_{t=k+1}^T (u_{zt} - u_{zt-k}) = \sum_{j=1}^T u_{zj} - \sum_{j=1}^{T-k} u_{zj} - \sum_{j=1}^k u_{zj}$

El comportamiento asintótico de estas sumas puede ser estudiado al transformar primero cada una de ellas como sigue [ver por ejemplo Phillips (1987)],

$$T^{-1/2} \sum_{j=1}^{[Tr]} u_{zj} \equiv X_{zT}(r)$$

$$T^{-1/2} \sum_{j=1}^{[Tr]-[T\kappa]} u_{zj} \equiv X_{zT}(r - \kappa)$$

$$T^{-1/2} \sum_{j=1}^{[T\kappa]} u_{zj} \equiv X_{zT}(\kappa)$$

donde  $r, \kappa \in [0, 1]$ ,  $\kappa < r$ ,  $[Tr]$  denota la parte entera de  $Tr$ , y luego aplicando un teorema de límite central funcional producto de Herrndorf (1984),

$$X_{zT}(r) \xrightarrow{D} \sigma_z W_z(r)$$

$$X_{zT}(r - \kappa) \xrightarrow{D} \sigma_z W_z(r - \kappa)$$

$$X_{zT}(\kappa) \xrightarrow{D} \sigma_z W_z(\kappa)$$

donde todos los límites son tomados mientras  $T \rightarrow \infty$ ,  $\xrightarrow{D}$  significa convergencia en distribución, y  $W_z$  es un proceso Wiener estándar. Por ejemplo,  $W_z(r)$  se distribuye normalmente para cada  $r$  en  $[0, 1]$ ; es decir  $W_z(r) \sim N(0, r)$ . Se asume que  $\sigma_z^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} E(\sum_{j=1}^T u_{zj})^2$  existe y es estrictamente positivo. Así pues,  $Su_z \xrightarrow{D} \sigma_z [W_z(r) - W_z(r - \kappa) - W_z(\kappa)] \equiv \sigma_z W_{z2}(r, \kappa)$ , donde  $W_{z2}(r, \kappa) \equiv W_z(r) - W_z(r - \kappa) - W_z(\kappa)$ .

Para probar la parte b) note que  $T^{-1} \sum_{t=k+1}^T u_{zt}^2 \xrightarrow{p} \sigma_z^2$ , y  $T^{-1} \sum_{t=k+1}^T u_{zt-k}^2 \xrightarrow{p} \sigma_z^2$ , usando la Ley de los Grandes Números Fuerte de McLeish (1975), mientras  $T^{-1} \sum_{t=k+1}^T u_{zt} u_{zt-k} \xrightarrow{p} \gamma_k$  (ver Hamilton (1994), p. 506). Así pues,  $Su_z^2 \xrightarrow{p} 2(\sigma_z^2 - \gamma_k)$ .

Para probar la parte c) note que  $E(\sum_{t=k+1}^T u_{xt} u_{yt}) = 0$ , y  $V(\sum_{t=k+1}^T u_{xt} u_{yt}) = (1 - \kappa) \sigma_x^2 \sigma_y^2 T$ . Un Teorema del Límite Central puede ser usado para mostrar que  $T^{-1/2} \sum_{t=k+1}^T u_{xt} u_{yt} \xrightarrow{D} N(0, (1 - \kappa) \sigma_x^2 \sigma_y^2)$ . Estos mismos argumentos pueden ser aplicados a los productos restantes.

Para probar las partes d) y e) note que  $S_{zt} = \sum_{j=1}^k u_{zt-j+1} = \sum_{j=1}^t u_{zj} - \sum_{j=1}^{t-k} u_{zj}$ . Podemos luego aplicar una transformación similar como la de la parte a) de arriba:  $T^{-1/2} (\sum_{j=1}^{[Tr]} u_{zj} - \sum_{j=1}^{[Tr]-[T\kappa]} u_{zj}) \xrightarrow{D} \sigma_z [W_z(r) - W_z(r - \kappa)] \equiv \sigma_z W_{z1}(r, \kappa)$ , donde  $W_{z1}(r, \kappa) \equiv W_z(r) - W_z(r - \kappa)$ . Finalmente, usando argumentos análogos como aquéllos de la prueba del Lema 1 en Phillips (1986):

$$T^{-3/2} \sum_{t=k+1}^T S_{zt} \xrightarrow{D} \sigma_z \int_{\kappa}^1 W_{z1}(r, \kappa) dr$$

$$T^{-2} \sum_{t=k+1}^T S_{zt}^2 \xrightarrow{D} \sigma_z^2 \int_{\kappa}^1 W_{z1}^2(r, \kappa) dr.$$

Para probar la parte f) note que, en analogía a Phillips (1986, p.315),

$$T^{-2} \sum_{t=k+1}^T (\sum_{j=1}^k u_{xt-j+1}) (\sum_{j=1}^k u_{yt-j+1}) \xrightarrow{D} \sigma_x \sigma_y \int_{\kappa}^1 W_{x1}(r, \kappa) W_{y1}(r, \kappa) dr.$$

La prueba de la parte *g*) asumirá que el momento muestral se calcula sobre la muestra completa, en lugar de sobre  $t = k + 1, \dots, T$ . La razón es que los cálculos son mucho más sencillos, y los órdenes de probabilidad no son afectados. Así pues, note que el primer elemento de la suma,

$$\sum_{t=1}^T u_{zt} DT_t = \sum_{t=T_b+1}^T (t-T_b)u_{zt} = \left( \sum_{t=1}^T tu_{zt} - \sum_{t=1}^{T_b} tu_{zt} \right) - \lambda T \left( \sum_{t=1}^T u_{zt} - \sum_{t=1}^{T_b} u_{zt} \right).$$

Ahora, del Lema A.1 en Perron (1989),

$$T^{-3/2} \sum_{t=1}^T u_{zt} DT_t \xrightarrow{D} \sigma_z \left\{ (1-\lambda) [W_z(1) - W_z(\lambda)] - \left[ \int_0^1 W_z(r) - \int_0^\lambda W_z(r) \right] \right\}.$$

Los mismos argumentos pueden ser aplicados a los elementos restantes.

Para probar la parte *h*), seguimos a Hamilton (1994, p. 547) para obtener:

$$T^{-1} \left( \sum_{t=k+1}^T S_{xt} u_{yt} - \sum_{t=k+1}^T S_{xt} u_{yt-k} \right) \xrightarrow{D} \sigma_x \sigma_y \left[ \int_\kappa^1 W_x(r) dW_y(r) - \int_\kappa^1 W_x(r) dW_y(r - \kappa) \right].$$

Para probar la parte *i*) note que el primer elemento del producto puede ser escrito como:

$$\sum_{t=k+1}^T S_{xt} DT_t = \sum_{t=1}^T S_{xt} DT_t - \sum_{t=1}^k S_{xt} DT_t. \text{ Now,}$$

$$\sum_{t=1}^T S_{xt} DT_t = \sum_{t=T_b+1}^T (t - T_b) S_{xt} = \sum_{t=T_b+1}^T t S_{xt} - \lambda T \sum_{t=T_b+1}^T S_{xt}.$$

Usando el Lema A.1 en Perron (1989):

$$T^{-5/2} \sum_{t=k+1}^T S_{xt} DT_t \xrightarrow{D} \sigma_x \left[ \int_\kappa^1 r W_x(r) dr - \lambda \int_\kappa^1 W_x(r) dr \right].$$

El segundo elemento del producto puede ser escrito como:

$$\sum_{t=k+1}^T S_{xt} DT_{t-k} = \sum_{t=1}^T S_{xt} DT_{t-k}, \text{ ya que } \sum_{t=1}^k S_{xt} DT_{t-k} = 0. \text{ Ahora,}$$

$$\sum_{t=1}^T S_{xt} DT_{t-k} = \sum_{t=T_b+1+k}^T (t - T_b - k) S_{xt} = \sum_{t=T_b+1+k}^T t S_{xt} - \lambda T \sum_{t=T_b+1+k}^T S_{xt} - \kappa T \sum_{t=T_b+1+k}^T S_{xt}.$$

De nuevo, usando Lema A.1 en Perron (1989):

$$T^{-5/2} \sum_{t=k+1}^T S_{xt} DT_{t-k} \xrightarrow{D} \sigma_x \left[ \int_{\lambda+\kappa}^1 r W_x(r) dr - (\lambda + \kappa) \int_{\lambda+\kappa}^1 W_x(r) dr \right].$$

## Apéndice 2

Ejemplo de un código de *Mathematica 6* para el caso de  $z \sim I(1)$ ,  $z = y, x$ , es decir,  $\Delta z_t = \mu_z + u_{zt}$ .

### 1. El código

```

a11=(1-κ)*T;
a12=κ*(1-κ)*μx*T2+SSUx*T3/2;
a21=κ*(1-κ)*μx*T2+SSUx*T3/2;
a22=κ2*(1-κ)*μx2*T3+2*κ*μx*SSUx*T5/2+SSUx2*T2;
b1=κ*(1-κ)*μy*T2+SSUy*T3/2;
b2=κ2*(1-κ)*μx*μy*T3+κ*(μx*SSUy+μy*SSUx)*T5/2+SSUxSSUy*T2;
c1=κ2*(1-κ)*μy2*T3+2*κ*μy*SSUy*T5/2+SSUy2*T2;
A=
[ a11  a12
  a21  a22 ];
invA=Inverse[A];
alfa=Factor[invA[[1,1]]*b1+invA[[1,2]]*b2]; delta=Factor[invA[[2,1]]*b1+invA[[2,2]]*b2];
alfanum=Numerator[alfa];  alfaden=Denominator[alfa];
deltanum=Numerator[delta];  deltaden=Denominator[delta];
expalfanum=Exponent[alfanum,T];  expalfaden=Exponent[alfaden,T];
expdeltanum=Exponent[deltanum,T];  expdeltaden=Exponent[deltaden,T];

numalfa=Limit[Expand[alfanum/Texpalfanum],T → ∞];
denalfa=Limit[Expand[alfaden/Texpalfaden],T → ∞];
numdelta=Limit[Expand[deltanum/Texpdeltanum],T → ∞];
dendelta=Limit[Expand[deltaden/Texpdeltaden],T → ∞];
alfalim =(numalfa/denalfa)*(Texpalfanum/Texpalfaden);
deltalim =(numdelta/dendelta)*(Texpdeltanum/Texpdeltaden)
sigmac=Factor[(T*(1-κ))-1*(c1+alfa2*T*(1-κ)+delta2*a22-2*alfa*b1-2*delta*b2+
2*alfa*delta*a12)];
s1num=Numerator[sigmac];  s1den=Denominator[sigmac];
exps1num=Exponent[s1num,T];  exps1den=Exponent[s1den,T];
numf=Limit[Expand[s1num/Texps1num],T → ∞];
denf=Limit[Expand[s1den/Texps1den],T → ∞];
σ2=FullSimplify[(numf/denf)]*(Texps1num/Texps1den)
numexplist=Exponent[s1num,T,List];  denexplist=Exponent[s1den,T,List];
xx22=Factor[invA[[2,2]]];

```

```

xx22num=Numerator[xx22];  xx22den=Denominator[xx22];
expxx22num=Exponent[xx22num,T];  expxx22den=Exponent[xx22den,T];
numxx22=Limit[Expand[xx22num/T^expxx22num],T -> ∞];
denxx22=Limit[Expand[xx22den/T^expxx22den],T -> ∞];
x2=(numxx22/denxx22)*(T^expxx22num /T^expxx22den)

```

## 2. La salida

El código previo produce tres artículos (los cuales corresponden a las tres líneas en el código que no terminan con punto y coma): las expresiones asintóticas para el parámetro estimado, la varianza del error, y el segundo elemento de la diagonal de la matriz de momentos invertida.

$$\text{i) } \widehat{\delta}_k = (\text{SSU}_x \text{SSU}_y + \text{SSU}_x \text{SSU}_y (-1 + \kappa)) / (\text{SSU}_x^2 + \text{SSU}_x^2 (-1 + \kappa))$$

$$\text{ii) } \widehat{\sigma}_\varepsilon^2 = T(2 \text{SSU}_x \text{SSU}_x \text{SSU}_y \text{SSU}_y - \text{SSU}_x^2 \text{SSU}_y^2 - \text{SSU}_x^2 (\text{SSU}_y^2 + \text{SSU}_y^2 (-1 + \kappa)) + \text{SSU}_x \text{SSU}_y^2 (-1 + \kappa)) / ((\text{SSU}_x^2 + \text{SSU}_x^2 (-1 + \kappa))(-1 + \kappa))$$

$$\text{iii) } (X'X)_{22}^{-1} = (-1 + \kappa) / (T^2(\text{SSU}_x^2 + \text{SSU}_x^2 (-1 + \kappa)))$$

De esta salida, el orden de probabilidad y la distribución asintótica del estadístico  $t$  pueden ser derivados por simple algebra.

## Apéndice 3

Aunque los detalles pueden ser encontrados en NSV, el siguiente cuadro resume los modelos usados para simular el estadístico  $t$  de la RHL para cada país.

Cuadro A1  
Resumen de los modelos usados para remuestrear el  
estadístico  $t$  de la regresión de horizonte largo

| País/Muestra | Variable | Modelo | Quiebre 1 | Quiebre 2 | Quiebre 3 | Longitud de rezagos |
|--------------|----------|--------|-----------|-----------|-----------|---------------------|
| Argentina    | Y        | $ETQ$  | 1912 (T)  | 1917 (NT) | 1980 (N)  | 5                   |
| 1884 - 1996  | M2       | $I(1)$ | –         | –         | –         | –                   |
| Australia    | Y        | $ETQ$  | 1891 (N)  | 1914 (N)  | 1928 (N)  | 4                   |
| 1870 - 1997  | M2       | $ETQ$  | 1941 (NT) | 1971 (NT) | –         | 1                   |
| Brasil       | Y        | $ETQ$  | 1928 (N)  | 1970 (NT) | –         | 3                   |
| 1912 - 1995  | M2       | $I(2)$ | –         | –         | –         | –                   |
| Canadá       | Y        | $ET$   | –         | –         | –         | –                   |
| 1870 - 2000  | M2       | $ETQ$  | 1920 (N)  | –         | –         | 1                   |
| Italia       | Y        | $I(1)$ | –         | –         | –         | –                   |
| 1870 - 1997  | M2       | $I(1)$ | –         | –         | –         | –                   |
| México       | Y        | $ETQ$  | 1953 (T)  | 1981 (T)  | 1994 (NT) | 5                   |
| 1932 - 2000  | M1       | $I(1)$ | –         | –         | –         | –                   |
| Suecia       | Y        | $ETQ$  | 1916 (NT) | 1930 (NT) | 1975 (NT) | 5                   |
| 1871 - 1988  | M2       | $ETQ$  | 1912 (NT) | 1918 (NT) | 1970 (N)  | 1                   |
| R.U.         | Y        | $ETQ$  | 1918 (NT) | –         | –         | 1                   |
| 1871 - 2000  | M4       | $ETQ$  | 1939 (N)  | 1970 (NT) | –         | 1                   |

N, T and NT significan nivel, tendencia, y nivel y tendencia, respectivamente.